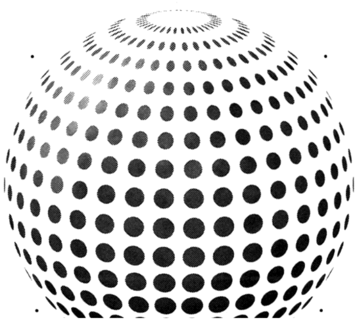
CD付き

シミュレーションで学ぶ 相対論入門

中力 眞一 Nakariki Shin-ichi
福間 一巳 Fukuma Kazumi



プレアデス出版

はじめに

『惑星は，太陽の周りをどのように運動しているのだろうか？　』この答えは，今日では誰しもがよく知っていることでしょう。それでは，『地球が太陽にずっと近づいたとき，その軌道はどのようになりますか？　』ではどうでしょうか。或いは，『光が，太陽の近くを通るとき，その軌道は曲がる？ 曲がらない？』という疑問はどうでしょう。

本テキストは，これらの疑問を，コンピュータシミュレーションによって自分が設定した条件で，また見たい視点から体験的に知ると同時に，その理由についても学べるようにとの思いから作っています。

上の意図に沿って先ず，シミュレーション実験を主体とした『実験篇』を，そして理論的な説明はその後の『理論篇』に配置した構成にしています。

『実験篇』では先ず，惑星についてケプラーの見出した3つの法則を「体験」することから始めます。これによって「現象を通して法則を見出す」ことの楽しさが体験できれば著者達の願いの一つは達成されたことになります。

その後，ブラックホール（BH）の近くに置かれた粒子源や光源からの光が，BHからの距離や放出角によってどのように違った軌道を描くかを色々な条件で，また視点で観察します。これによって，「何故そのような軌道になるのか」という疑問に関心が向けられれば願いの2つ目が達成されたことになります。

『理論篇』では，先ず，ニュートンの「万有引力の法則」と「力学」とから，ケプラーの3法則がどのように説明されるかについて概観します。次に，アインシュタインの「特殊相対論」と「一般相対論」について高校程度のレベルから始め，少し詳しく説明した後で，時空の曲がりとしての重力の表現や，またそこから新たに予測された光の曲がりや惑星の近日点移動などについて説明します。

後半部は，少し数学的に高度（大学1年後半から3年前半程度）にはなりますが『Maxima』というフリーの数式処理ソフトを駆使すれば理解の助けと成るでしょう。付録のCD-ROMには，アプリケーションプログラムと共に，複雑な式の導出にどの

ように Maxima を用いたらよいかの例題と成るプログラムも用意しています。

本テキストは，その目的と紙数の関係から特殊相対論については，その必要性から成り立ちまでかなりの紙数を費やしていますが，一般相対論についてはその導入部分と，静的で球対称な重力源（シュワルツシルド型ブラックホール）の作る時空，および相対論的宇宙論の初歩，とテーマをかなり絞り込んでいます。しかしながら，自然界に存在するブラックホールは，このテキストで扱うシュワルツシルド型より高速回転しているカー型や，色々な「電荷」を持ったものの方が現実的でしょう。また，宇宙論の方でも相対論の枠内だけでは説明仕切れない現象が観測されています。

このような状況にあって，本テキストを踏み台として，より現実的な重力源の生み出す時空についての学びへと進み，それらを反映したプログラムを作成したり，或いは，相対論と素粒子論に基礎を置く様々な宇宙モデルについての研究へと進み，宇宙についてのより深い理解を得る一助となることが著者達の最終的な願いです。

■アプリについて　本書に付属のアプリケーション プログラム（以後，アプリ）は，

(1) **太陽のまわりの惑星の運動,**
(2) **地球の周りをまわる人工衛星の運動,**
(3) **ブラックホールのまわりの物体や光の軌跡**

のすべてを**一般相対論**を用いて表現するという基本方針の下に，C/C++ を基本言語とし，表示用として OpenGL とそれを簡単に使えるように作られた GLUT や GLUI と呼ばれるライブラリーを用いて作っています。

アプリの主体は，一般相対論に基づく一連の微分方程式で，これをユーザから入力された様々な条件の下で４次のルンゲ・クッタ法により数値的に解き，その結果を表示するというものです。

■付属の CD-ROM について　CD-ROM 内には，その構成とアプリの操作法を記した ReadMe.pdf ファイルと共に，（１）実行ファイルとソースコード，（２）本文中の公式，および問題の解でその導出に複雑な計算を要するものについての wxMaxima プログラム，および（３）アプリの使用法についての動画などが入ったフォルダがあります。

■謝辞　アプリの開発や著述に関して，多くのテキストやフリーソフト，ネットワークサイトを利用させて頂いています。これらの関係者，取り分け当アプリの開発で必要不可欠な GLUT，GLUI の開発者には特に感謝申し上げたい。また，テキスト全

体に目を通して頂き，貴重なアドバイスを頂きました茨城大学名誉教授の野田二次男先生，岡山理科大学名誉教授の田代勤先生，そして，永年にわたり著者達と研究を共にして来た先輩であり友人でもあります元関西外国語大学の大谷晃也先生と武庫川女子大学大学院の福井哲夫先生にも謹んで感謝を申し上げたい。

■著作権について　当テキストに付属のアプリの利用に際して，上記のソフト開発者やサイトの著作権を侵害しない範囲で自由に，利用，改良することを許可致します。ただし，当アプリの欠陥や改良に依る不利益が他者に及ぶことを避けるためにも本アプリ，およびその改良版を公開や商用に利用する際には，その旨を下記アドレスにてお知らせ頂きたい。

sinnaka@gmail.com

■免責について　本アプリ使用において生じた如何なる不利益についても応じかねますので，当アプリの使用は自己責任にてお願い致します。ただし，そのような不利益が生じた場合は，速やかに上記アドレスまでお知らせ下さい。

著者

目次

第 I 部

実験篇

第 1 章
シミュレーション実験

1.1 基礎知識

詳しい説明は後の理論篇に譲り，ここでは，当アプリを一つの道具として楽しむために必要な最小限の基礎知識について記すことにします。

1.1.1 重力について

“重力”とは，一言で言えば，地上のすべての物体に**『重さ』**を与えている力ですが，その正体についての理解は，歴史的に大きな変遷を経て来ています。

1.1.1.1 ニュートンの“重力”（17 世紀後半）

ニュートンは，地上で起こるすべての力学現象は次の 3 つの基本法則に基づいて説明されることを発見し，『力学』を完成させました。

(1) 力が働かなければ，物体は静止したままか，等速直線運動を続ける（**慣性の法則**）
(2) 力が働くと，物体はその 慣性質量（動き難さを表す物体に固有の量）に反比例した速度変化を起こす（**運動の法則**）
(3) 他の物体から力を受けている物体自身も相手に対して同じ大きさで，反対向きの力を及ぼしている（**作用・反作用の法則**）

更に，“重力”についても，『物体同士は，その大きさが，それぞれの 重力質量（重力の原因と見なせる物体に固有の量）の積に比例し，その間の距離の 2 乗に反比例する力で互いに引き合っている』という**万有引力の法則**を仮定し，更に慣性質量と重力

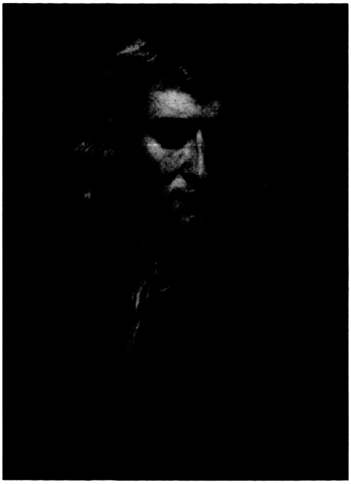


図 1.1 1689 年のニュートン（ゴドフリー・ネラー画）ウィキペディア(Wikipedia):フリー百科事典』より

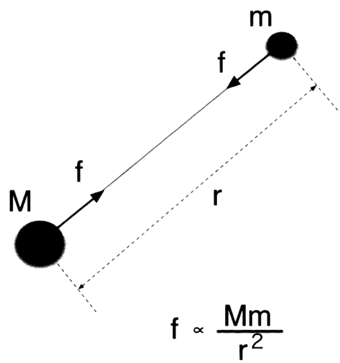


図 1.2 万有引力の法則

質量とが等しいと仮定（**等価原理**）すれば，『力学』によって地上の放物体の運動も天体の運動も統一的に説明できると考えました[*1]。

1.1.1.2 アインシュタインの“重力”（20 世紀初頭）

アインシュタインが構築した相対論には，『特殊相対論』と，これを一般化した『一般相対論』とがあります。この内の一般相対論が，特殊相対論の要請に矛盾する万有引力の法則を廃して，これに代わりその要請を満たすように構築した“特殊相対論的重力理論”とも呼ぶべき新しい重力の理論を提供しています。

1.1.2 相対論について

アインシュタインは，1905 年に，それまでの波動説に基づく光の媒質としての仮想物質“エーテル”の存在を否定すると同時に，『光の速さは自然界における最高速で

[*1] **慣性質量** (inertial mass) と**重力質量** (passive gravitational mass) という言葉は，後に名ずけられた言葉で，文献“Theory and experiment in gravitational physics” (C.M.Will 著 Cambridge Univ. Press) によると，Bondi(1957) による造語のようです。

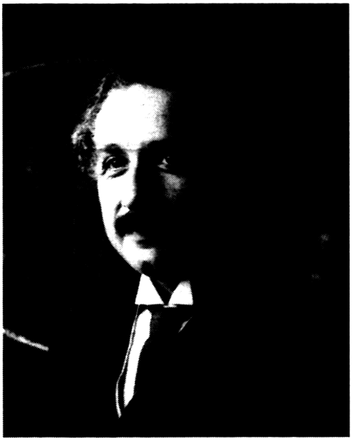


図 1.3 「ウィキペディア (Wikipedia): フリー百科事典』より

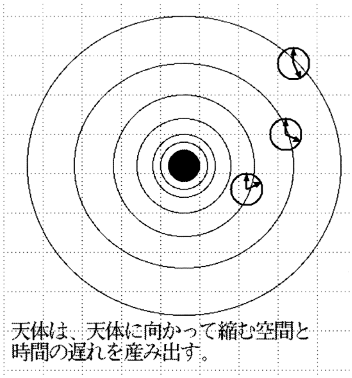


図 1.4 時空の曲がりによる重力

あり，またすべての自然現象を司る法則は慣性の法則が成り立つすべての乗り物（**慣性基準系**）で同じである』という2つの基本的な前提の基に**特殊相対論**を構築しました[*2]。

特殊相対論によると，光速を限度として速く運動すればするほど『時間はゆっくりと経過し，長さも運動方向に沿って短くなって行く』と結論されます。例えば，光速の $\frac{1}{3}$ 倍の速さで運動しているロケット内では，時間は地球の1秒に対して約0.94秒，つまり1秒毎に約0.06秒遅れて進み，長さは地球の1mに対して約0.94m，つまり1m当たり約0.06mの割合でその進行方向に縮んでいることになります。

特殊相対論からの結論を，時々刻々と速さと向きを変えて運動している乗り物（**加速度系**）で考えるとどのような結論が導かれるでしょうか。アインシュタインが日本での講演でも引用したとされる高速で回転している円盤状の乗り物の例で考えてみましょう。

円盤の上にいる人々が回転する速さは，その中心からの距離に比例して速くなって行くため，それらの人々が回転方向に沿って置いたものさしと時計は，外側に行くほど短く，時間はゆっくりと流れることになります。これに対して，半径方向に沿って置いたものさしはどこでも回転の向きと垂直であるため静止している場合と変わりな

[*2] これら2つの前提は，それぞれ光速度不変の原理，特殊相対性原理と呼ばれています。特殊相対論はこれら2つの基本原理を指導原理として構築されたといえます。

く，その長さはどの場所でも同じであると結論されます。以上のことから，円盤上の空間では，円周率 $= \frac{\text{円周}}{\text{直径}} \neq \pi$ となると結論されます。この例からも明らかなように，一般に

加速度系の時空の空間は，一様で等方なユークリッド空間とは異なり，また時間もどの場所でも同じ刻みで流れるというものではない。

ことが分かります。

一般相対論は，このような複雑な時間・空間を記述するために，**リーマン幾何学**という特殊な数学的な“言葉”を用いて，加速度系や慣性系を一貫して統一的に扱えるように構築された理論と言えるでしょう。

準備が整ったので『“重力”をアインシュタインはどのように考えたか』のテーマに向かいましょう。

アインシュタインが手掛かりとしたのは『**等価原理**』です。『同じ高さの塔から自由に物体を落下させると，その質量に関係なく同時に地上に落ちて来る』というのがガリレイの落体の法則として知られる経験（実験）事実です。

これを“落下する物体の立場”で考えてみましょう。この物体には，２種類の力が働いています。一つは地球が引っ張る力，すなわち重力で，もう一つは物体が静止の状態を，或は，運動している場合はその速度を一定に保とうとする物体の“動き難さ”に根ざす慣性力です。

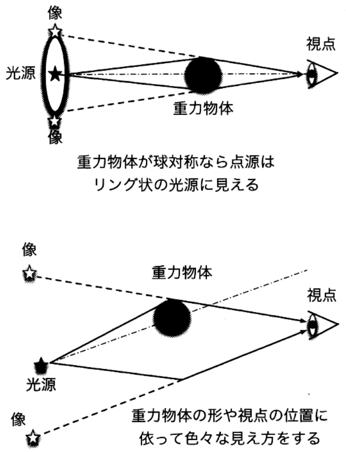
もし，等価原理が厳密に成り立ち，慣性質量と重力質量とが等しくこれら２種類の力が等しいなら，これらの力は物体上でつり合い，結果として物体は“無重力”の状態になります。つまり，地上から見ると物体は地球の重力のために加速度運動をしていますが，この地上の観測者から物体と云う“加速度系”に移ることによって地球による“重力”は打ち消されたことになります。言い換えれば，この前提の下では，“重力”も見かけの力ということになります[*3]。

アインシュタインが，この等価原理[*4]を認めて，『“重力”＝加速度系＝時空の曲がり』というシナリオを描いて“重力”を幾何学化したのが一般相対論です。

[*3] 遠心力が慣性力の一形態であることからも分かるように，慣性力は物体以外の例えば地上の人が見ても存在しません。このような異なった観測者が見ると消えてしまう力は**見かけの力**と呼ばれています。

[*4] アインシュタインの等価原理は，正確には，単に慣性質量＝重力質量というだけのものではなく，これに加えて自由落下系も各瞬間瞬間で異なる速さではあるがそれぞれが慣性系であると主張するものです。詳しくは理論篇の第 3.1 節を参照して下さい。

1.1.2.1 重力レンズ効果



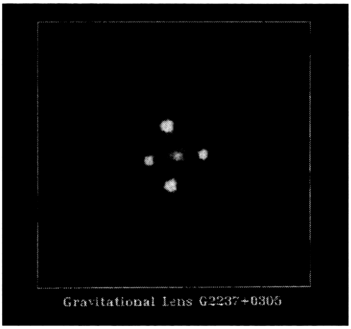


図 1.5 QSO 2237+030 クェーサーの Y88G 楕円銀河による像（ハッブル宇宙望遠鏡の画像：ウィキペディア (Wikipedia):フリー百科事典』より）

“重力”によって物体が力を受けるという現象の一般相対論に依るシナリオは，次の通りです。

物体は，その周りの空間を縮め，時間を遅らせる。他の物体がその時間・空間（以後，時空）内に入って来ると，ある種の『屈折』現象を起こし，何らかの力を受けたようにその軌道を曲げる。

このシナリオに依ると，物体だけでなく光もその軌道を重力により曲げられることになります。これは**重力レンズ効果**として知られる現象で，今ではそれと認められる多数の観測の報告があります[*5]。また，現在の素粒子物理や宇宙物理の最大の研究テーマと言える“ダークマター”や“ダークエネルギー”の発見のための一つの手段としてもこの現象は利用されて来ています。

1.1.2.2 ブラックホール

『ブラックホール』とは，文字通り光も出て来れないほど“重力”が強い，つまりその近くの時空が激しく曲げられて，光すらそれに落ち込んで行くか，高々その周り

[*5] 図 1.5 は，アインシュタインの十字架と呼ばれていて，早くにそれと認識されたものの中でも特に有名です。この写真はハッブル宇宙望遠鏡によるもので，ウィキペディア (Wikipedia):フリー百科事典に掲載されているものです。

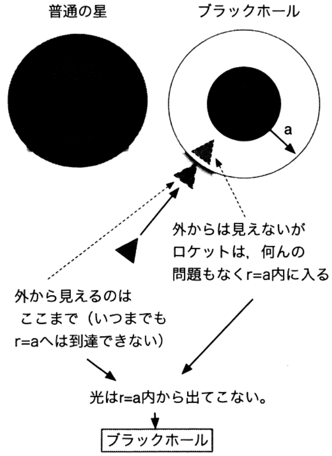


図 1.6　シュワルツシルド型ブラックホール

を巡る閉じた軌道しか許さないような重力源を指しています。

ブラックホールは，その組成と形状と自転をしているか否かによって色々なタイプのものが考えられますが，このテキストでは，その組成の相違と自転とが無視でき，その物質分布が球対称性を有するタイプのシュワルツシルド型のブラックホールを扱います。

このタイプのブラックホールは，アインシュタインの重力方程式のシュワルツシルド解として知られる厳密解から予測されたのが始まりです。

その研究によって，上の条件に該当する天体はすべてその質量 M によって決まる**『シュワルツシルド半径』**と呼ばれる固有の半径 $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{2MG}}{\mathbf{c^2}}$ を持っていて，普通の天体の場合は，その実際の半径がシュワルツシルド半径よりずっと大きいため，その存在が意味を持つことはありませんが，その半径がシュワルツシルド半径より小さいサイズの天体に成ると，シュワルツシルド半径内の領域が外とは異質な性質を持つ，いわゆる“ブラックホール”としての特徴を有することが示されました[*6]。

図 1.6 は，ブラックホールに自由落下して行くロケットが，何の障害もなくシュワルツシルド半径を越えてブラックホールに落ちて行くのに対して，この様子を見てい

[*6] ここで，G は万有引力定数で c は光の速さ，M は天体の質量です。これによると太陽のシュワルツシルド半径は約 3km 程度と計算されます。

る遠方の観測者にはロケットがこの半径に近づいて行く姿しか見えない，つまりこの半径内に入ったロケットからの光はこの半径内から出て来れないことを示しています。“実験 4” では，この現象は直接は扱いませんが，シュワルツシルド半径近くに置いた光源からの光が殆どすべてブラックホールに吸収されてしまう様子を確認できるでしょう。

1.2　アプリの使用法

1.2.1　起動

プログラムの開発・コンパイル等を行わない場合は，実行ファイル LightOrbit (Windows では Light_Particle.exe) をデスクトップなど，自分のワークスペースに置いて，そのアイコンをダブルクリックすれば起動します[*7]。

1.2.2　コントロールボックス

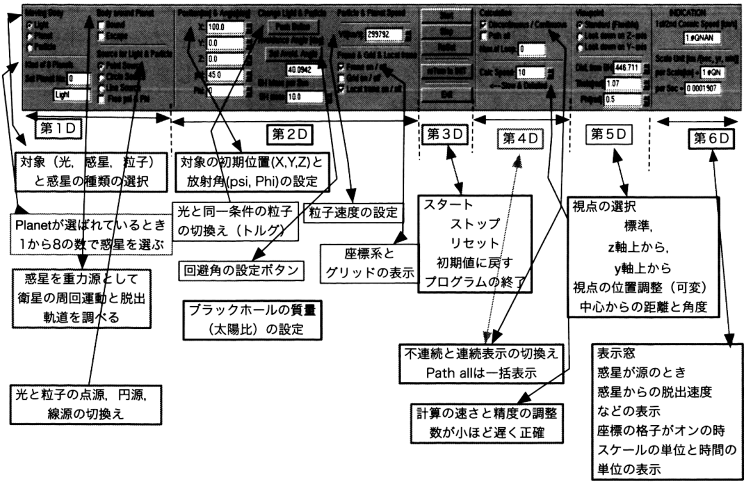
起動画面は，上部の**コントロールボックス** (以下，**CB** と略記) とその下の表示域の 2 つの部分から成っています。図 1.7 は，**CB** を示したものです。この図からも分かるように，全体が縦の区切り線により 6 つの区域に分かれています。これらを左より順に第 1,2,3,· · · ,6D と呼ぶことにします。その役割はおおよそ次の通りです。

第 1D (1) 対象（光・惑星・粒子）の選択と惑星の種類の切換え
(2) 惑星を源にするスイッチ（物体の惑星からの脱出や運動の調査用）
(3) 光源と粒子源の選択（点，円，線）

第 2D (1) 対象の初期位置と放射角の設定
(2) 同一環境での光と粒子の間の切換え（光と粒子の相違についての調査用）
(3) 回避角の表示と設定（回避角を psi 窓に設定する）
(4) 重力源の質量入力窓（太陽質量を単位として質量を入力する）
(5) 惑星や粒子の速度入力窓
(6) グローバルとローカル座標系，および座標格子の表示のオンオフ

[*7] 安定に動作させるためには他に，Mac では，GLUI.Framework が，Windows では freeglut.dll がインストールされている必要があります。置く場所については，Mac では GLUI.Framework のパッケージ化されたものが付属の CD-ROM にあるのでこれを用いれば自動的です。また，Windows の場合は，付属の CD-ROM から，当アプリと同じ場所か，どこか path の通った場所，或いは他の dll ファイルがある場所へコピーして置くと便利でしょう。詳しくは，付録 §C.5 を参照して下さい。

図 1.7　コントロールボックス



第 3D スタート，ストップ，リセット，および初期値へ戻すボタンと終了ボタン

第 4D (1) 表示（連続，不連続，一括）の切換え

(2) 計算回数の設定（連続表示時，途中で停止できないことを考慮して設定）

(3) 計算の速さと精度の設定*8

第 5D 視点の設定

(1) 視点の選択（標準，z 軸上から xy 面を見る，y 軸上から xz 面を見る）

(2) 視点の位置調整（中心からの距離と角度を極座標で設定）

第 6D 表示用窓

(1) 惑星が重力源のとき，第 1 宇宙速度と第 2 宇宙速度を表示。太陽が重力源のとき，惑星の脱出速度を表示

(2) 第 2 D の格子がオンのとき，座標のスケールの単位を表示。実際の距離と時間への換算用

*8 数字が小さいほど遅いが正確，ただし，小さくした場合は，描かれる軌跡の数は減少するため，計算回数を増やす必要がある

1.2.3 使用例

具体的な使用法については，付録の CD-ROM の中のファイル ReadMe.pdf や，以下の各種“実験”の手順を通して知ることができるでしょう。

1.3 実験 1

地表から物体を色んな角度で，また速さで放出して軌道の相違について調べてみよう。

1.3.1 予備知識

1687 年にニュートンが完成させた理論は，これまでの観測では十分な精度で確認されて来ているため相対論もこれらの結論に矛盾することは許されません。その相違は，（1）重力源の物体の質量が非常に大きい場合や，（2）重力源からの距離が非常に近い場合に顕著になると予想されます。

ここでの“実験”は，ニュートン理論で良く説明されている現象です。重力が非常に弱いため高精度の“装置”を用いてもなかなか相対論との相違を見いだすことは難しいでしょう。そのためニュートン理論から知られている結論を念頭に入れて“実験”に臨むことにしましょう。

1.3.1.1 第 1 宇宙速度と脱出速度

ニュートン理論によると，質量 $M = 5.974 \times 10^{24}$kg，半径 $R = 6378$km の地球の場合，次のことが結論されます[*9]。

(1)『7.91km/s』より小さい速さで物体を水平に打ち出すと，地表に落下する。
(2)『7.91km/s』の速さで物体を水平に打ち出すと，地表すれすれに**円軌道**を描く。
(3)『7.91km/s』より大きく『11.2km/s』より小さい速さで物体を水平に打ち出すと，**楕円軌道**を描く。
(4)『11.2km/s』以上の速さで水平に打ち出すと，物体は地球の重力に依る束縛を離れて遠方に去る。

*9 ここでの記述は，地上のある 1 点から物体を地表に平行に投げ出した場合のものですが，地表からの高さが地球の半径に比べて無視できる程の高さであれば同じことが言えるでしょう。

ここで現れた2種類の特別な速さの内で，『7.91km/s』は**第1宇宙速度**，『11.2km/s』は**第2宇宙速度（脱出速度）**として知られています[*10]。

ニュートン理論によると第1宇宙速度は，

$$\sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{6.674 \times 10^{-20} \times 5.974 \times 10^{24}}{6378}} = 7.91\text{km/s},$$

として，また，脱出速度はこれを $\sqrt{2}$ 倍すれば求められます 。

“実験”では，地表（アプリでは，地球を実際のサイズより小さく表示しています）から水平に打ち出した物体が，その打ち出しの速さによってどのように変化するかを，また打ち出しの角度を色々と変えたときの運動の様子などを観察しましょう。

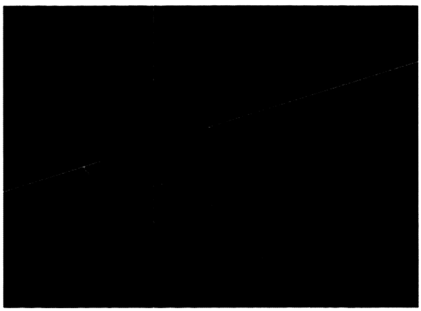


図 1.8　**地球からの脱出**：Viewpoint [Standard, Dist from BH=925.6, Theta=0.85, Phi=1.07]

1.3.2　シミュレーション実験

最初は，“装置”に馴れるという意味からも以下の手順に従うのがよいでしょう。

(1) 起動画面で，第 1D の **Planet** をクリックして惑星モードを選択[*11]。
(2) 第 1D の **Body around Planet** の **Escape** をクリックして地球を重力源に，続けて第 5D の **Look down on Z-axis** をクリックして視点を z-軸上方

[*10] 放射位置や放射角，初速度など，いわゆる“初期条件”と軌道との間の関係についてのニュートン理論による解説は，理論篇の第 1.6.2 節でしています。

[*11] このとき，第 1D の **Set Planet No** の窓には **3** が，その下の窓には **Earth**（地球）が選ばれていることを確認する。

から xy 面を見下ろす位置に置く[*12]。表示が小さくて見難いときは，第 5D の **Dist. from BH** の数字を小さくする。

(3) 第 3D の **Start** を押して運動の様子を観察する（中止する場合は **Stop** を，続行する場合は **Start** を，元の状態に戻す場合は **ReSet** を押す）[*13]。

(4) 観察後，**Stop**，**ReSet** を続けて押し最初の状態に戻す。

(5) 軌跡を見るために第 4D の **Discontinuous / Continuous** をクリックして，チェック（レ）を外す。

(6) **Start** を押し，表示が終わるまで待つ（**Discontinuous / Continuous のチェック（レ）がない場合（連続表示）は途中で止めることはできない**）。望む軌跡が描かれない場合は，**ReSet** 後，第 4D の **NumofLoop** の数字を大きくする。また計算速度が遅い場合は，その下の **Calc Speed** の数字を大きくして調整する。

(7) 全軌跡を一括表示したい場合は，**ReSet** を押し元の状態に戻した後，第 4 D の **Path all** をクリックして **Start** を押す。

(8) 物体の放出角の一つ，第 2D の **psi** の値のみを 120°，135°，180° と変えて繰り返し実行し観察する[*14]。特に，180° の場合は，第 4D の **Discontinuous / Continuous** にチェックを入れ，第 2D の **Frame on /off** とその下の **Local frame on /off** のチェック（レ）を外して行うとよい。

研究課題 1.3.1

人工衛星を上げるのに適した角度は何度（°）か[*15]。

研究課題 1.3.2

真上に投げ上げたとき，戻ってこないための最小の速さはいくらか。

研究課題 1.3.3

同様の実験により他の惑星についても脱出速度を調べて，結果をリストにまとめよ。

---

*12 このとき，第 6D の最初の窓に第 2 宇宙速度（脱出速度）が，また第 2D の **V0[km/s]** には，その $\frac{1}{10}$ が表示されている。

*13 このときの物体の速さは，脱出速度に至るまで $\frac{\textbf{脱出速度}}{10}$ ずつ速く成るように設定している。**V0[km/s]** の値の変化に注目。

*14 psi 値の 90[deg] は，90° のことで，この角度が地表に平行な場合に相当します。

*15 もちろん，地球の自転を考慮すると状況は違ってきます。ここでは（プログラムも）地球の自転は考えていません。

1.4 実験2

太陽の8つの惑星の運動の様子を調べ，『ケプラーの法則』を確認しよう。

1.4.1 予備知識

この“実験”で扱う現象も，ニュートン理論により良く説明されています。しかし一方で，水星の**近日点**（軌道上で太陽に最も近い点）が，100年に数十秒角の割合でニュートンの予測とずれるという『**水星の近日点移動**』として知られる現象も，観測から指摘されていました。アインシュタイン理論ではこのずれをよく説明できるということで，この理論の正当性の一つの証拠になったことは有名なところです。

とは言え，動的な可視化をテーマとする当アプリの精度では，この差は計算誤差の中に埋もれてしまってその相違を見いだすことはできません。ニュートンとアインシュタインの2つの理論の相違については，別の状況を設定することによりより顕著に示すことができるため，これについては後に回すことにしましょう。

1.4.2 太陽系の惑星

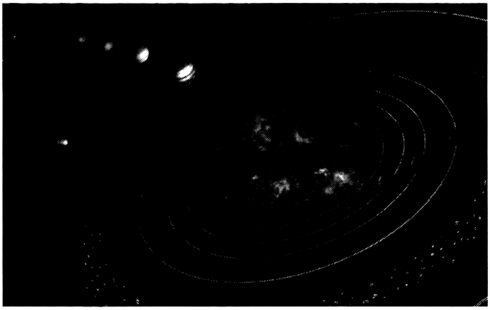
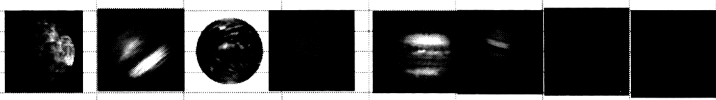


図1.9 サイト http://i.dailymail.co.uk/より

	水星	金星	地球	火星	木星	土星	天王星	海王星



赤道半径	0.3825	0.9488	1(6378.1km)	0.53226	11.209	9.449	4.007	3.883
質量	0.055	0.815	1(5.9742E+24kg)	0.107	318	95	14	17
平均軌道半径	0.38709893	0.72333199	1(149597890km)	1.52366231	5.20336301	9.53707032	19.19126393	30.06896348
離心率	0.20563069	0.00677323	0.01671022	0.09341233	0.04839266	0.0541506	0.04716771	0.00858587
平均速度km/s	47.8725	35.0214	29.7859	24.1309	13.0697	9.6724	6.8352	5.4778
周期〔年〕	0.2408467	0.61419726	1.0000174	1.8808476	11.862615	29.447498	84.016846	164.79132
脱出速度km/s	4.25	10.36	11.18	5.02	59.54	35.49	21.29	23.71

図 1.10　**惑星の観測データ**（英語版 Wikipedia より）。赤道半径，質量，平均軌道半径は地球を 1 とした数値

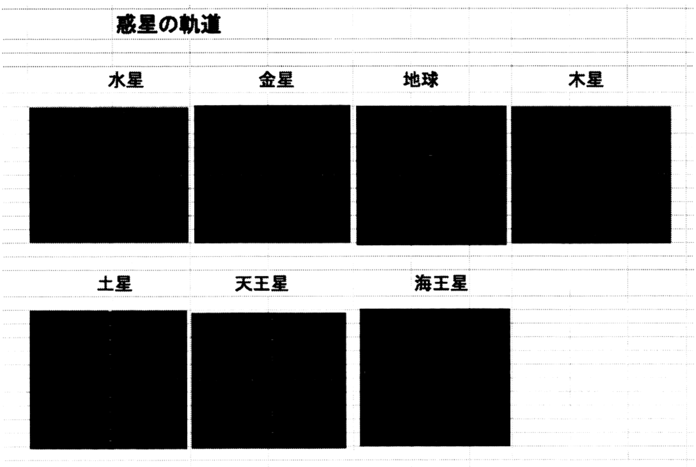


図 1.11　惑星の軌道（何れもほぼ円軌道）

1.4.2.1　ケプラーの法則

ヨハネス・ケプラーは，ニュートンが 1687 年に『力学』を完成する以前の 1619 年に，師であるティコ・ブラーエの火星の観測記録に基づいてつぎの法則を発見しました。

第1法則（楕円軌道の法則）：惑星は，太陽を焦点とする楕円軌道上を運動している。

第2法則（面積速度一定の法則）：惑星の運動に伴って太陽と惑星を結ぶ直線が，一定時間の間に描く扇形の面積は常に同じである。

第3法則（調和の法則）：惑星が太陽のまわりを一周する時間（公転周期）の2乗は，楕円の長半径の3乗に比例する。

1.4.3 シミュレーション実験

1.4.3.1 第1法則の確認

先ず，観察から始めましょう。起動画面で，第1D の **Planet** をクリックして“惑星”にして，以下の手順で進めます。

■観察

(観1) **Start** ボタンをクリックして，地球の公転運動の様子を観察する。

(観2) 第2D に表示された V_0**[km/s]** の値を読み，公転速度（正確には近日点での速度）を記録する。また，第6 D の最初の窓に表示された値にも注意する。

(観3) 第2D の **X**[km] の値を読み，近日点距離を確認し記録する（数字の最後の e+08 は 10^8 を意味する)。

(観4) **Stop** を押し，続けて **ReSet** を押す。

(観5) 第5D の **Look down on Z-axis** を押し z 軸上方からの視点に変え，**Start** を押して観察。観察後，**Stop** に続けて **Reset** を押す。

(観6) 第5D の視点を **Standard** に戻し， 第1D の **Set Planet No** の数字を 2〜8 まで順に変えて，同様な操作に依り残りの惑星についても軌道を確認し，近日点距離とその場所での惑星の速さを記録しておく。

■測定　各惑星について，長半径 a と近日点距離 r_p に対する距離を画面から読み取り，これらの値から離心率 e と短半径 b を計算してグラフを描き，軌道が楕円であることを確認します。

(1) 第1D の **Set Planet No** の数字を 1 にして水星にセット，続けて視点を **Look down on Z-axis** にセット。

(2) 第4D の **Discontinuous / Continuous** のチェック（レ）を外して連続表示にして **Start** を押し，表示が終わるまで待つ 。

(3) 画面上の軸に記された目盛を用いて，水星の近日点距離 r_p と長径 $2a$ に相当す

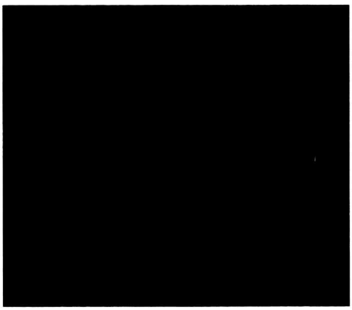


図 1.12　**火星の軌道**

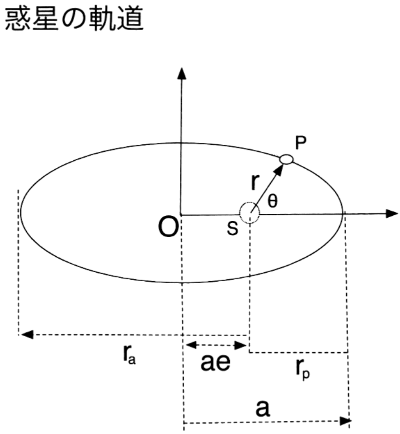


図 1.13　**平均軌道半径** $\bar{r} = \frac{r_a + r_p}{2}$ は楕円の長半径 a に等しい。**平均軌道速度** $\bar{v}$ は，半径 $\bar{r}$ の円軌道上を公転周期 T で運動しているときの速さ。**近日点** r_p での惑星の速さは，$\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\bar{v}$ である。ただし，e は**離心率**。

惑星	r_p	$2a$	$e(=1-\frac{r_p}{a})$	$b(=a\sqrt{1-e^2})$	スケール因子 [km]
水星					
金星					
地球					
火星					
木星					
土星					
天王星					
海王星					

表 1.1　測定データの整理

る値を読み取り記録する。読み取った r_p と $2a$ の値から実際の値を求める。この値は，第 2D の **Grid on /off** をクリックして，第 6D の **per Scale[km]** の窓に表示されたスケール 1 目盛に対する実際の距離（以後，スケール因子）を測定値に掛けることによって得られる[16]。尚，r_p と a については，図 1.13 を参照のこと。

(4) **Set Planet No** の数字を 2〜8 まで順に変えて，同様な操作に依り残りの惑星についても行い，結果を表 1.1 に示したような表にする 。

(5) 上に得た a, b を用いて，適当なツールに依り楕円のグラフ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ を描き，このアプリで描いた各惑星の軌道と比較せよ。

研究課題 1.4.1

表示を z 軸上方からの視点にして，連続表示（第 4D の **Discontinuous / Continuous** のチェック（レ）なし）で軌道を描かせ，（観 3）で記録した近日点距離とスケールの読みから，スケールの一目盛り当たりの実際の距離を計算して **per Scale[km]** の窓に表示された値と比較せよ。

研究課題 1.4.2

求めた惑星の軌道の離心率 e を，理科年表やネットで示されている数値と比較せよ。

1.4.3.2　第2法則の確認

■準備　ストップウォッチ（または時計）を用意し，次の準備をして測定に備えます。

(準 1) “装置”の設定

第 1D の **Planet** を選び，第 5D の **Look down on Z-axis** を押して z 軸上に視点を設定。更に，第 4D の **Discontinuous / Continuous** にチェックが入っていることを確認する。

(準 2) 回転速度の調整

Start を押すと同時にストップウォッチ等で時刻の計測を始める。回転が**速い**（遅い）場合は，第 4D の **Calc Speed** の数字を**小さく**（大きく）する。ただし，この操作で設定した数値は，**本実験中は変えない**。

---

[16] $e+06$ 等の数が隠れているので，マウスで数字の何処かをクリックしてキーボードの矢印キーで末尾までポインターを移動して，最後の数字まで確認すること。

■**観察** 測定前に，次の観察をしておきます。

周期の放出角度依存性について調べましょう。

次の手順で行います。

(1) **Start** を押すと同時に，ストップウォッチを押し，地球が1周するのに要した時間*17を計測し記録する。
(2) **ReSet** 後，第2D の **psi** の数字90を **140.0** に直接書き換える。これにより地球から出ている矢が外側に傾くことを確認する。
(3) **第4D** の **Discontinuous / Continuous** の (レ) マークを外して軌道を観察する*18。
(4) 再び **Discontinuous / Continuous** に（レ）マークを付け，上記 (1) の手順を繰り返す。
(5) **第2D** の **psi** の値を，**120.0, 100.0, 80.0, 60.0, 30.0** と変えて同様の操作を繰り返し，"周期"を測定し記録して行く。

研究課題 1.4.3

この"実験"では，"放出"前の地球の位置とその地点での速さとは常に同じであった。変えたのはただ太陽に向かう地球の"放出"の角度 ψ のみであった。この事実と，記録した"周期"の測定値とからどのようなことが結論されるか考察せよ*19。

■**測定** 第1D の **Set Planet No** の数字を1にして水星で測定しましょう。この点を除いて，必要なら準備の (準1) と (準2) とを繰り返し次の測定に取り掛かります。

(1) **Start** と同時に時間の計測を始め，出発時から最初に y 軸を通過するまでの経過時間 t_a を計測し，記録する。
(2) t_a から水星が x 軸の負の側（開始時と太陽を挟んで反対側）を通過するまでの経過時間 t_b を計測し，記録する。
(3) 更に，t_b から水星が y 軸の負の側を通過するまでの時間 t'_b と，これから元の

*17 もちろん，地球の**公転周期**そのものではありません。実際の周期はこれに適当な数（マシンに依っては第6D の **per Sec** の窓に表示された数が適当かも知れません。しかしその他のマシンでは適当に換算する必要があるでしょう。目安は地球の場合に結果が 1yr(年) になるか否かです）をかけることに依って得られます。しかし，以後はこの計測結果を便宜上"周期"と呼ぶことにします。
*18 表示が途中で止まる場合は，第4D の **Num of Loop** の数を増やす。
*19 ニュートン理論による結論は (1.44) を参考にして下さい。

位置に戻って来るまでの時間 t'_a を計測して記録する。

(4) 第 4D の **Discontinuous / Continuous** の (レ) マークを外して第 2D の **Grid on /off** に (レ) マークを入れる。

(5) **Start** を押し，軌道を描かせる。軌道が途中で切れる場合は，第 4D の **Num of Loop** の数を大きくする。

(6) 描かれた楕円の面積の内で，t_a と t'_a の間に軌道と y 軸に囲まれた部分の面積 S_a，S'_a と，残りの部分の面積 S_b，S'_b とを，画面上に描かれた正方格子の数を数えて求める[*20]。

(7) $\frac{S_a}{t_a}$ と $\frac{S_b}{t_b}$，および $\frac{S_a+S'_a}{t_a+t'_a}$ と $\frac{S_b+S'_b}{t_b+t'_b}$ とを計算してそれぞれの結果を比較する。

研究課題 1.4.4

上記，手順 (7) で得た結果をケプラーの第２法則との関係において考察せよ。

1.4.3.3　第 3 法則の確認

第 3D の **reTurn to Init** を押して初期状態に戻します。次に，**Planet** と第 4D の **Discontinuous / Continuous** にチェックマーク（レ）が入っていることを確認して，第 5D の **Look down BH on Z-axis** にチェックマーク（レ）を入れて z 軸上方からの視点にして置きます。

(1) **Start** を押して，地球の回転の速さを調べる。すこしゆっくりと回転するように第 4D の **Calc Speed** の数字を小さ目にしておく。手順は，第２法則の準備の (準 2) でした操作と同じ。調整後は，この実験中はこの値を変更しないようにする。

---

*20 極座標で表した楕円の式 $r = \frac{p}{1+e\cos\phi}$ を用いると，角 ϕ が 0 から ϕ まで変化する間に軌道の囲む面積 S_ϕ は，

$$S_\phi = \frac{p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{\phi}{2}}{A}\right) - \frac{eA\tan\frac{\phi}{2}}{A^2+\tan^2\frac{\phi}{2}}\right] \tag{1.1}$$

と計算されます（導出に関しては理論篇第 1 章の (1.18) を参照して下さい)。これを用いると

$$S_a = \frac{p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} - \frac{e}{2}\sqrt{1-e^2}\right] \tag{1.2}$$

$$S_b = \frac{p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{e}{2}\sqrt{1-e^2} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\right] \tag{1.3}$$

と求められます。より正確には，これらを用いて求めてもよいでしょう。ただし，$A = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$ で，p は直接読み取り，e は読み取った r_p と a より求めます。

(2) 第 2D の **X**[km] の数値のどこかにポインターを合わせて編集し，**0.7e+8** にセットする。
(3) 第 2 法則の確認のときと同様にして“周期”を計り，記録する。
(4) 第 4D の **Discontinuous / Continuous** の (レ) マークを外して連続表示にする。
(5) **Start** を押し，軌道を描かせ，描かれた楕円の横軸の長さ（長半径の 2 倍）を座標軸に描かれた目盛から読み取り，長半径を記録する。このとき，第 6D の **per Scale** の値と **per Sec** の値も記録しておく。完全な楕円が描かれない場合は，前実験の手順 (5) のときと同様に第 4D の **Num of Loop** の数を増やして調整する。
(6) **ReSet** 後，**X**[km] の値を **0.8e+8, 0.9e+8, 1.0e+8, 1.1e+8** に順にセットして同様の操作を繰り返し，“周期”と“長半径”を記録して行く[*21]。
(7) 結果を，例えば表 1.2 のような表にまとめる。
(8) スケール因子が同じであることを確認後，(7) の結果から次のような表を作る[*22]。

a	T	$\bar{v}(\equiv \frac{2\pi a}{T})$	$a\bar{v}^2$

研究課題 1.4.5

手順 (8) のリストの最右列 $a\bar{v}^2$ の値が，ほぼ同じあることを確認せよ。また，このことから $\bar{v}$ が惑星の平均公転速度であることに注意すると $T^2 \propto a^3$ が成り立ってい

[*21] 周期測定の場合と同様に，ここで測定した長半径の値は実際の軌道のものではありませんが，適当な定数をかければ実際の軌道の値になります。従って，測定した長さと時間は，実際のと“単位”が異なるだけで，ここで求める周期と長半径との間の関係には影響しません。

[*22] もちろん，ここでの T, a は実際の値ではありません。実際の値を得るためには，スケール因子と，画面上の長さの単位と時間の単位を知る必要があります。これらを知るためには，例えば，地球の実際の軌道半径と周期を用いて換算すればよいでしょう。表示されている per Scale と per Sec，特に per Sec は，開発環境でのマシンではこの数字が丁度“掛けるに適当な”数になるように設定していますが，他のマシンでは異なるかもしれません。

距離 r (10^8km)	周期 T[s]	長半径 a	per Scale	per Sec
0.7				
0.8				
0.9				
1.0				
1.1				

表 1.2 表中の周期 T と長半径 a はすべて画面上の値，per Scale と per Sec の値を用いて実際の値を求める。

ることが分かるが，この事実を，『平均の軌道半径 a 上を，平均の公転速度 $\bar{v}$ で，円運動している質量 m の惑星には，$\frac{m\bar{v}^2}{a}$ の遠心力が働いていて，これと万有引力とがつり合いの状態にある』としてニュートン理論により説明せよ*23。

1.5 実験 3

ブラックホール (BH) の近くに置かれた粒子は，どのような軌道を描いて運動するだろうか？

1.5.1 予備知識

ブラックホールは，その中に入れば光さえ出て来れないくらいに重力が強い領域を伴った“何か”のことで，その領域の内側は外側とは異質の構造をもった時空領域を形成しています。しかしながら，外側では単に重力が非常に強いというだけです。ここでは（このアプリでは），この意味でのみブラックホールを考えます。つまり，ブラックホールに伴う特異な領域に関しての話題やその中に入った小物体の運動についての議論については別の文献に譲ることにします*24 。

*23 ケプラーはニュートン以前に，観測結果からのみこの結論に到達しました。

*24 この分野に関心のある読者は，例えば参考文献 [3] を参照されると良いでしょう。しかしながら，その紹介文にも書いた通りこの文献は数学的にもかなり難解です。初心者は，先ず，本書や他の入門書によりある程度の予備知識を得て次のステップとして読まれることを勧めます。

1.5.1.1 近日点移動

惑星の運動の“実験”でも触れましたが，観測上，太陽に最も近い軌道を巡る水星の軌道は，厳密にはニュートン理論から予測される楕円ではなく，その太陽に最も近い位置（近日点）が一周毎に少しずつズレることが知られていました。そのズレは100年に数秒角と非常に小さかったためこの“実験”でも計算誤差の中に埋もれてしまい見いだすことができませんでした。

しかし，そのズレは，重力が強く成れば大きくなると予想されます。実際の太陽は地球の約33万倍もの質量を持っていますが，その半径は約70万kmに及びます。つまり，太陽に近づくことができたとしても最大この距離までです。“実験”では，この広がりを無視して点状のブラックホール，つまり半径約3kmの球状の『異質の領域』の中心にある点としての“何か”として扱うため，太陽半径に相当する距離よりずっと内側で『異質の領域』の外側に置かれた小物体の運動を調べ，ニュートン理論からのズレについて考察することができます。

本アプリで扱うブラックホールは，点状で，回転していない**シュワルツシルド型のブラックホール**です[*25]。このタイプのブラックホールのサイズは，**シュワルツシルド半径**

$$a = \frac{2MG}{c^2} \tag{1.4}$$

によって特徴付けられます[*26]。これは，例えば太陽の場合，

$$M_\odot = 1.9884 \times 10^{30}\mathrm{kg}, \qquad G = 6.674 \times 10^{-20}\mathrm{km}^{-3}\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$$

および，$c = 2.9979 \times 10^5\mathrm{km/s}$ を代入して

$$a_\odot = 2.953\mathrm{km} \tag{1.5}$$

と計算されます。これを用いると (1.4) は

$$a = \left(\frac{M}{M_\odot}\right) a_\odot$$

[*25] 厳密には，シュワルツシルド ブラックホールは，点状である必要はなくそれを構成する物質やエネルギーなどがシュワルツシルド半径より内側に球対称に分布していて，回転していてもその速さが時空構造に影響を及ぼす程には大きくないものを指します。

[*26] 本体がどこまで分布していようと，この半径で囲まれた内側の真空の領域がこれに伴う『異質の領域』で，いわゆるブラックホールとしての振る舞いはこの領域があるが故に生じるため，この半径をもってブラックホールのサイズと言えるでしょう。

と書かれます。これにより，太陽質量の 10 倍の点状のブラックホールは，約 30km の半径の球体と見なせることが容易に分かります。

1.5.2 シミュレーション実験

先ず太陽表面スレスレに相当する距離から第一宇宙速度に相当する速さで放出した小物体について，近日点移動の現象の確認から始めましょう。

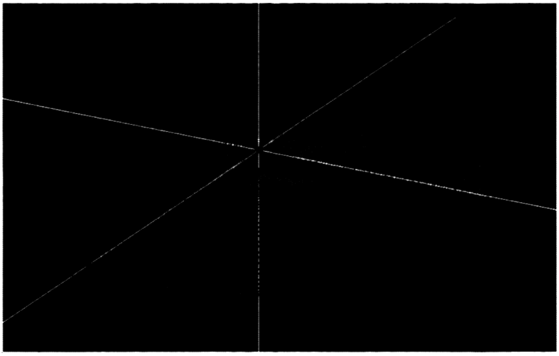


図 1.14 **近日点移動の例：**デフォルト設定から, Num of Loop=80000, Standard とした場合

1.5.2.1 近日点移動

(1) 起動画面から第 1D の **Particle** を選び，第 2D の $\mathbf{V_0}$[km/s] の数字を，ニュートン理論から計算される第一宇宙速度 **436.7**km/s に書き換え，更に，第 2D の **X**[km] の数字を太陽半径 **696000** に書き換える。

(2) 第 4D の **Path all** にチェック（レ）を入れ，**Start** を押し，軌道を観察する。軌道が途中で切れる場合は第 4D の **Calc Speed** の値を小さくする。

(3) **ReSet** 後，**X** の値のみを **600000** と小さくして **Start** を押す。

(4) **ReSet** 後，**X** の値のみを更に 600000 から **100000** まで 100000 ずつ減らして行き軌道の相違を観察する。この場合，描画が画面からはみ出す場合は，第 5D の **Dist from BH** の数字を大きくして調節する。また，第 4 D の **Calc Speed** の値をより小さくしたり，**Num. of Loop** の数を大きくしたりする必要があるかもしれません。

(5) **X** の値を **100000** にして，**第 5D の Look down on Z-axis** を押し，z 軸上から観察する。

(6) **ReSet** 後，**第 1D** の Particle を一旦 **Light** へ変えて再び直ぐに **Particle** に戻す（これが Particle のデフォルト設定の状態）。このとき，X と V_0 の値が変化したことを確認して，**Start** を押し，様子を観察する。

（注）　この実験では，かなりの計算の精度が要求されるため **Calc Speed** の値を相当小さくする必要がありますが，これにより計算の速度は遅くなるため自分の PC の性能を考慮して実行する必要があります。また，**Calc Speed** の値を小さくすることに伴い描かれる軌跡の数は減少するため，第 4D の **Num. of Loop** の数を大きくする必要があるかもしれません。ともあれ **Path all** のチェック（レ）が入った状態で実行してみると良いでしょう。

1.5.2.2　落下する軌道

研究課題 1.5.1

ニュートン理論で許された軌道は，２次曲線（楕円，放物線，双曲線）のみで，BH に落ち込んで行くのは直線軌道しか無い。この結論はアインシュタイン理論でも正しいか？ $\mathbf{V_0}$，**X**，**CalcSpeed** を色々と変えてシミュレーション実験で確認せよ[*27]。

1.6　実験 4

ブラックホールの近くの光源から発せられた光は，どのような軌跡を描くだろうか？

1.6.1　予備知識

ニュートン理論の根拠とする万有引力は，質量を持ったもの同士だけが力を及ぼし合うため，質量を持たない光は，重力の影響をまったく受けず直線的な軌跡を描くと結論されます。

これに対して，『重力は時空の曲がり』とするアインシュタイン理論では，光が重

[*27] 軌道が描かれない場合や，描かれても異常である場合は，計算の精度が足りないことによるため，**CalcSpeed** の値を小さくして再度試して下さい。また，軌跡がブラックホールに落ち込むと，自動的に放射角を変えて再描画するように設定しているため，**Num. of Loop** の数を調整して一軌跡のみ描かれるようにする必要があります。



図 1.15　落下軌道の例：X=140, psi=109, V0=12882, Num of Loop=2300, Calc Speed=5

力源に向かって縮んだ時空の中に入って来ると“屈折”現象を起こすため，光も曲線的な軌跡を描くと結論されます。

一般相対論では，曲がった時空を表現するために『リーマン幾何学』を用います。そして，この中に入れられた粒子や光は，それによって表現される空間，『リーマン空間』の中での“直線”，つまり**測地線**を描いて運動すると考えます[*28]。従って，一般相対論では粒子や光の運動は，いわゆる運動方程式ではなく幾何学的な測地線を求める方程式により記述されることになります[*29]。

1.6.1.1　**回避角と回避のコーン**

一般相対論に依ると，前実験 1.5.2.2 で調べたような小天体などの物体だけでなく，光もブラックホールに落ち込んで行く曲線軌道が存在します。

光源から発せられた光は，光源の位置を頂点としてブラックホールに向かって開いた円錐（コーン）を境として２分されます。その内部に放射されたすべての光はブラックホールへと落ちて行き，その外側に発せられた光はその進路を強く曲げられ

[*28] “直線”はもちろん文字通りの直線ではなく，曲がった空間の中の２つの点を結ぶ最も短い（現実の時空間では長いとなります）曲線を指します。地球は球体です。従って，地面の上に“直線”を描いても厳密には直線ではなく大円の一部です。これがいわゆる測地線です。

[*29] 当アプリは，これらの方程式（２階の連立微分方程式）を４次のルンゲ・クッタ法という良く知られた手法により数値的に解き，結果を描画するようにしたものです。ここで，『４次の・・・』の４は，計算精度を表しています。この数字が大きい程，計算の精度は高くなりますが，厳密な科学的な結果ではなく可視化を目的とする当アプリではこの程度の精度で十分と考えています。

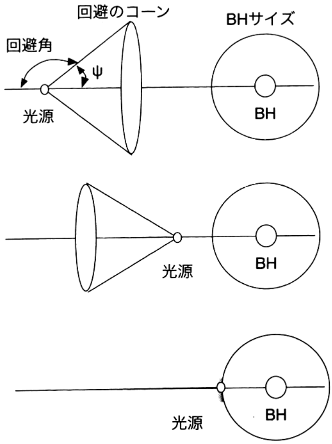


図 1.16 **回避角と回避のコーン**：ψ がアプリの**第 2D の Set avoid angl to psi** ボタンによって入力される角度

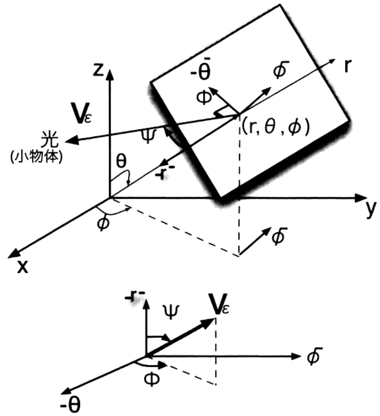


図 1.17 **放射角** ψ, **Φ**：アプリの**第 2D の psi** が ψ, **Phi** が Φ

ながらも遠方に飛び去って行きます[*30]。また，コーンに沿って放射された光は，ブラックホールにトラップされることもなく，また遠方に飛び去ることも無くブラックホールのまわりを回り続けます。ただ，この軌道は非常に不安定であるため現実的ではありません。実際，当アプリでも計算誤差のため何回か回った後でブラックホールへ落ち込んで行くか，遠方に飛び去る軌道が描かれるでしょう。

この光の軌道を分けるコーンは回避のコーンと呼ばれます。そして，このコーンの軸（光源とブラックホールとを結ぶ直線）と母線との成す角が**回避角**です（図 1.16 参照)。回避角が置かれた光源の位置に依ることは明らかでしょう。計算に依るとこの角は，光源がちょうどブラックホールのサイズの位置に来たとき 0 となります。つまり，この点ではどの方向に発せられた光もすべてブラックホールに吸収されてしまうことになります。

---

*30 『ブラックホールに向かって開いた』とか，『コーンの内部，外部』という概念は光源の位置によって違って来ます。ここの文は図 1.16 の一番上の状況を想定しています。

1.6.2 シミュレーション実験

アプリの起動画面は，第 1D の **Light**，第 2D の **BH Mass per Sun** が 10，**X** が 100km，第 1D の **Point Source** が選ばれた状態と成っています。つまり，起動直後は，太陽質量の 10 倍のブラックホール（サイズは約 30km）から 100km の所に置いた点光源から発せられた光の軌跡を調べる設定と成っています。この設定から始め，円光源，線光源についても調べてみましょう。

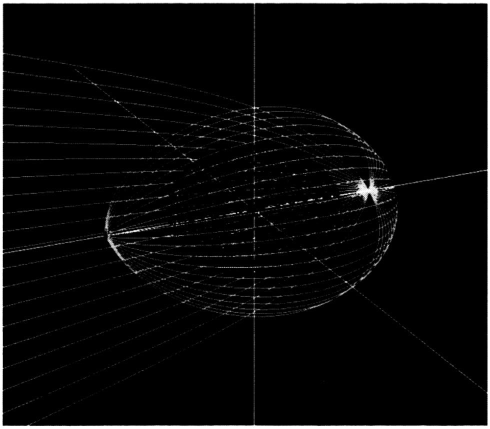


図 1.18 点光源の例：X=50, psi=79.95, Viewpoint[Dist from BH=913.6, Phi[rad]=1.133]

1.6.2.1 点光源

(1) 起動画面から，第 2D の **psi の値を 45** にして **Start** を押し，光の粒（**光子**）の運動の様子を観察する。
(2) **Stop, ReSet** 後，第 4D の **Discontinuous / Continuous** のチェックを外し，**Start** を押す。
(3) **ReSet** 後，第 4D の **Path all** にチェックを入れ，**Start** を押す。
(4) **ReSet** 後，第 2D の **Push Button** をクリックして，**Start** を押し，光と同一条件での粒子の運動を観察。
(5) 再び，第 2D の **Push Button** をクリックして **Light** に戻し，第 4D の **Path**

all のチェックを外し，第 4D の **Discontinuous / Continuous** のチェックを入れる。更に，第 2D の **Set Avoid Angl** ボタンを押し，放射角を回避角（このボタンで入力されるのは，正確には回避角の補角）にする。

(6) **Start** を押し，軌道を観察した後，第 4D の **Discontinuous / Continuous** のチェックを外して **ReSet** 後，再び **Start** を押す。

(7) **ReSet** 後，全体を見るために第 4D の **Path all** にチェックを入れて **Start** を押す。

(8) **ReSet** 後，第 2D の **X** を **50** に変えて，第 2D の **Set Avoid Angl** ボタンを押し，第 4D の **Discontinuous / Continuous** のチェックを入れて **Start** を押し，観察する。

(9) **Stop, ReSet** 後，第 2D の **psi** 値を前項 (8) での値より僅かに大きくして **Start** を押し，観察する。視界が狭く成った場合は，適宜第 5D の Viewpoint の **Dist from BH** の値を大きくして実行して下さい。

(10) **Stop, ReSet** 後，第 4D の **Path all** にチェックを入れて，**Start** を押し，回避のコーンを観察する。

(11) **ReSet** 後，第 2D の **X** を **40, 35** と変えて同様な操作を順に行い，回避のコーンの変化の様子を観察する。

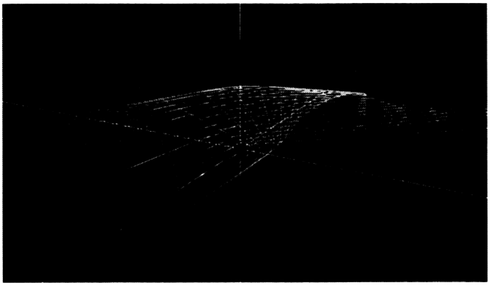


図 1.19 円光源の例：X=72.3, Z=23.6, psi=94.6, Phi=80, Viewpoint[Dist from BH=446.7, Theta=1.07, Phi[rad]=0.5]

1.6.2.2 **円光源**

(1) 第 3D の **reTurn to Init** を押し，起動時の設定に戻し第 1D の **Circle Source** を選ぶ。

(2) 第2Dの **Local frame on /off** のチェックマークを外して，**Start** を押し，観察する。
(3) **Stop**，**ReSet** の後，第4Dの **Discontinuous / Continuous** のチェックを外し，連続表示にして **Start** を押して円周上に配置した光源からの光線が，ブラックホールにより1点に収束される様子を観察する。
(4) **ReSet** 後，第4Dの **Path all** にチェックを入れて **Start** を押し観察する。
(5) 第5Dの **Dist. from BH** や **Theta** や **Phi** の値を変えて視点を移動して色々な距離や角度から観察する。
(6) **ReSet** 後，第1Dの **Free Setting Angle** にチェックを入れ，**X,Y,Z,psi,Phi** の値を色々変えて同様な観察をする。角度の設定は，第2Dの **Local frame on /off** にチェックを入れて局所座標系を表示して行なう。また，第4Dの **Path all** にもチェックを入れておく。画像が表示されない場合は，第4Dの **Calc Speed** の値を小さくする。またこの場合は同時に **Num of Loop** の数字を大きくする必要がある場合もあるので注意。
(7) 第2Dの **Push Button** を押して，同じ条件下での粒子の振る舞いについて調べる。

1.6.2.3 線光源

研究課題 1.6.1

円光源の場合を参考にして，第1Dの **Line Source** を選択して，平行光線がブラックホールに入って来た様子を観察せよ。

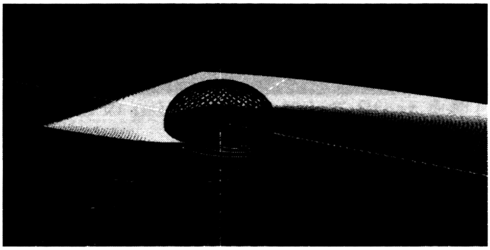


図 1.20 線光源の例：X=50, Y=-85.9, Z=0.0, psi=90, Phi=102, Calc Speed=28, Viewpoint[Dist from BH=446.7, Theta=1.07, Phi[rad]=0.5]

第 II 部

理論篇

第1章

力学からのアプローチ

先ず，ニュートンの万有引力の仮説と，力学の基礎である『運動の3法則』とから予測される物体の運動について調べて行くことにしましょう。

1.1　運動方程式

万有引力の法則によると，質量を持った物体はすべて互いに引き合っていて，その引き合う強さは，物体間の距離の2乗に反比例し，それらの質量の積に比例します。

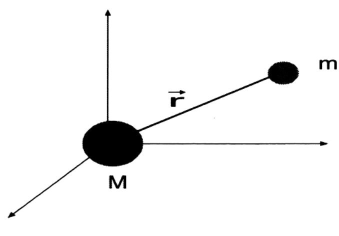


図1.1　**大質量の天体Mの周りを運動する小質量の天体m**

この力を仮定すると，太陽のような大質量 M〔kg〕の天体からの力を受けて運動する小質量 m〔kg〕の天体（M の惑星）の運動は，運動の法則に基づくと次の微分方程式（運動方程式）により記述されます。

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{1.1}$$

式中の G は，**万有引力定数**と呼ばれている比例定数で，SI 単位系での値は $G =$

$6.673 \times 10^{-11} m^3/s^2kg$ です。また，$\vec{r}$ は，天体 M の中心を始点として天体 m の中心を終点とするベクトル（以後，M を原点とする m の位置ベクトル，或は単に位置ベクトルと呼びます）です[*1]。

天体 M が作る重力場内での m の運動は，数学的にはこの式を積分することによって知ることができます。しかし，このベクトル式は3つの2階の微分方程式から成っているため積分操作によって6個の未知定数を生じます。従って，積分してもその未知の6個の値を決めなければ軌道は一意には決まりません。

軌道を一意に決めるためには，例えば，**初期条件**として，現象を観測し始めた時刻 $(t=0)$ における天体 m の位置 $\vec{r_0}$ と速度 $\vec{v_0}$ とを同時に与える必要があります。

理論的には初期条件が分かれば軌道は定まりますが，この場合でも，通常の“微分方程式を解く”という手続きではどのような初期条件のときにどのような軌道になるかを予め予測することは困難です。

この問題に対処するための有力な方法があります。それは，運動方程式 (1.1) を直に解く代わりに，これらの方程式を先ずこれらから導かれる保存法則**（エネルギーと角運動量保存則）**に着目して，与えられた初期条件から導かれる軌道を予測できる形に書き直し，整理するという方法です。

1.2　保存法則

この節では，ここで扱っている力学系が持つ2種類の保存則に着目して，運動方程式を簡素化する方法について考えることにします。

1.2.1　力学的エネルギー保存則

一般に，働いている力が時間に陽に依存しない力学系については，力学的エネルギー保存則が成り立つことが知られています。

現在の場合，これは運動方程式 (1.1) に速度 $\frac{d\vec{r}}{dt}$ をスカラー的に掛けて（つまり内積（スカラー積）をとって）時間について積分することによって導かれます：

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 - G\frac{Mm}{r} = E \tag{1.2}$$

[*1] ここでは，太陽と惑星をモデルにしているため，天体 M, m 間の距離 $r(\equiv |\vec{r}|)$ は，その各々の半径より十分大きいと考えています。そうでない場合は，それらの天体の形状や質量分布が問題となります。また，$m \ll M$ の仮定が無い場合は2体系として M の運動も考える必要があります。

左辺の第 1 項目は，天体 m の運動エネルギーで第 2 項目が無限遠点を基準に選んだときの位置エネルギーです。従って，右辺の E は意味からすれば天体 m の力学的な全エネルギーですが，数学的には積分によって得られた積分定数，つまりどの時間で見ても同じ値の量=保存量であることが分かります。

1.2.2　角運動量保存則

もう一つの保存則について考えましょう。これは，一般的には回転対称性を持つすべての力学系に対して成り立ちますが，ここでは力が**中心力**であるためこの条件を満たします[*2]。具体的には次のようにして求めます：

運動方程式 (1.1) に左からベクトル的に $\vec{r}$ をかける（つまり外積（ベクトル積）をとる）と，力は $\vec{r}$ に平行（向きは真反対）であるためベクトル積の性質により右辺は 0 となり，直ちに

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \tag{1.3}$$

が導かれます。もちろん $\vec{L} = m\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$ は，M の周りの m の角運動量です。この式より直ちに $\vec{L}=$ 一定であることが分かります。しかし，以後は質量 m は常に一定として扱うため代わりに単位質量当たりの角運動量，

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\ell} \tag{1.4}$$

を用いることにします。これは運動方程式 (1.1) からも分かる様に天体 m の運動はその質量が例え 1 であっても同じであることを念頭に置いた処置です。

1.3　ケプラーの第 2 法則

角運動量の式 (1.4) とこれが保存すること，そして外積の定義から，直ちに『**惑星は常に同一平面内にあり**，その運動に伴って位置ベクトル $\vec{r}$ が，この平面内で単位時間当たりに描く図形の面積は常に等しい (**面積速度一定**)』ことが導かれます。これは，正に『ケプラーの第 2 法則』の力学に依る証明ですが，少し詳しく説明しましょう。

[*2] 天体 m が M から受ける力は常に M の方へ向き，その大きさは M からの距離にのみ依存する，いわゆる中心力であるため，この力学系は M を中心とする任意の回転に対しても力学的な状況を変えません。このことを簡単に『この系は M について回転対称性を持つ』と言い表します。

ある瞬間に，天体 m が位置 $\vec{r}$ にあり，そのときの速度が $\vec{v}$ $\left(= \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$ であったとします。このとき，外積の定義から $\vec{\ell}\,(= \vec{r} \times \vec{v})$ は，$\vec{r}$ と $\vec{v}$ とが張る平面に垂直な向きを持っていることが分かります（図 1.2 の左図 参照)。ところで，この瞬間の $\vec{r}$ と $\vec{v}$ とが作る平面は，保存則 (1.3) により $\vec{\ell}$ の向きが天体 m の運動に依ることなく一定に保たれるため常に同一であると結論されます。更にこの事実に，その大きさも不変であることを考慮すると，結局 $\vec{r}$ と $\vec{v}$ とは，m の運動に伴ってその大きさと向きとを変えながらも，“共同して” 同じ面積の平行四辺形を同一の平面内に描きながら動いていることが分かります。

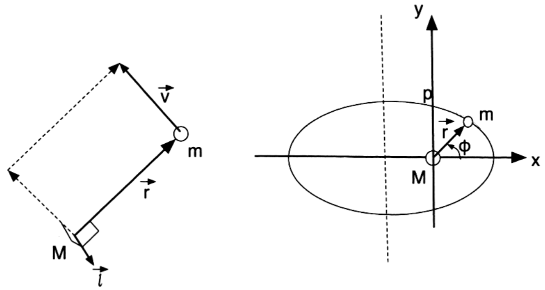


図 1.2　角運動量保存則から，小天体 m は同一平面内を運動すると結論される

1.3.1　角運動量と面積速度

今，ある瞬間の天体 m の位置が $\vec{r} = (x, y, 0)$ で，そのときの速度が $\vec{v} = (\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ 0)$ となるようなデカルト座標系 xyz を設定したとします。このとき，この座標系では $\vec{\ell} = (0, 0, \ell_z)$ となり角運動量は z 軸方向を向いています。ただし，$\ell_z \equiv x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}$ と置いています。そして，角運動量の保存則により，この後のこの値も向きも m の運動と共に一定に保たれることが保証されているため，以後もこの座標系を用い続けることは意味が有ることになります。

1.3.1.1　角運動量

図 1.2 の右図のように，重力天体 M を原点にして極座標 r, θ を設定すると，位置ベクトル $\vec{r}$ の x, y 成分は，それぞれ

$$x = r\cos\phi \tag{1.5}$$

$$y = r\sin\phi \tag{1.6}$$

と表されるため，速度 $\frac{d\vec{r}}{dt}$ は

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi \tag{1.7}$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi \tag{1.8}$$

となります。これらを用いると角運動量の z 成分 ℓ_z は

$$\ell_z = r^2\dot{\phi} \tag{1.9}$$

と計算されることが分かります。ここで，表記を簡単にするために，時間 t による微分は $\dot{x}$ のように，微分される量の上にドットを付して表していることに注意して下さい。

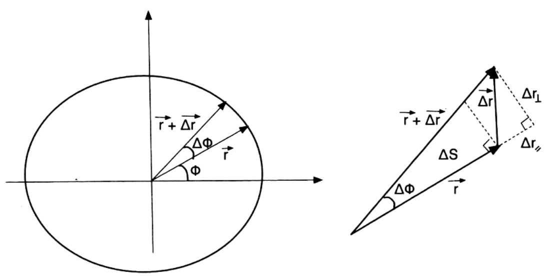


図 1.3　**面積速度**：時刻 t の位置 $(\vec{r},\ \phi)$ から微小時間 Δt 経過してその位置が $(\vec{r} + \Delta\vec{r},\ \phi + \Delta\phi)$ になったとすると，$\vec{r}$ と $\vec{r} + \Delta\vec{r}$，および軌道の間に囲まれた領域の面積は $\Delta S = \frac{1}{2}r^2\Delta\phi$ で近似される。ただし，$r \equiv |\vec{r}|$ とする。

1.3.1.2　面積速度

図 1.3 の右図から分かるように，Δt の微小時間中に天体 m が角 ϕ の位置から $\Delta\phi$ だけ僅かに増加したとすると，このときの $\vec{r}$ の増加量 $\Delta\vec{r}$ は，$\vec{r}$ に平行な成分 $\Delta r_{\parallel}$ と

垂直成分 $\Delta r_\perp$ によって与えられます。更に同図を参考にすると，これらは $\vec{r}+\Delta\vec{r}$ の大きさ $|\vec{r}+\Delta\vec{r}| \approx r+\Delta r$ によりそれぞれ

$$\Delta r_\parallel = |\vec{r}+\Delta\vec{r}|\cos\Delta\phi - r \approx \Delta r, \tag{1.10}$$

$$\Delta r_\perp = |\vec{r}+\Delta\vec{r}|\sin\Delta\phi \approx (r+\Delta r)\Delta\phi \tag{1.11}$$

と表されることが分かります[*3]。ここで，$\Delta\phi$ が微小のとき $\cos\Delta\phi \approx 1$，$\sin\Delta\phi \approx \Delta\phi$ と近似されること，および $|\Delta\vec{r}| \equiv \Delta r$ としたことに注意して下さい。

このとき，図 1.3 の右図を参考にすると，$\vec{r}$ と $\vec{r}+\Delta\vec{r}$ を 2 辺とする微小な三角形の面積 ΔS は，

$$\Delta S = \frac{1}{2}r\ \Delta r_\perp = \frac{1}{2}r\,(r+\Delta r)\,\Delta\phi \tag{1.12}$$

と表されることが分かります。更に，一般に，軌道上では r と ϕ とは定まった関数関係にあるため Δr と $\Delta\phi$ とは比例関係にあることを考慮すると，この式の右辺の括弧（かっこ）内の 2 項目からの項 $\Delta r\Delta\phi$ は，$\Delta\phi$ について 2 次の微小量となるため無視できることが分かります。

こうして，無限小時間 dt の間に動径 $\vec{r}$ が描く微小な領域の面積 dS は，

$$dS = \frac{1}{2}r^2\ d\phi \tag{1.13}$$

によって計算されることが分かります。従って，この式の両辺を dt で割ることによって，直ちに次の面積速度と角運動量の間の関係に導かれます[*4]。

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi} = \frac{1}{2}\ell_z \tag{1.14}$$

このようにして，角運動量が保存するという事実から面積速度が一定ということを，或は逆に，面積速度が一定という事実から角運動量が保存することを知ることができます。

■参考　天体 m の描く軌道が楕円であると言う結論を先取りすると，(1.28) を (1.14) に用いて

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\frac{p^2}{(1+e\cos\phi)^2}\frac{d\phi}{dt} \tag{1.15}$$

[*3] $|\vec{r}+\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\vec{r}+\Delta\vec{r})\cdot(\vec{r}+\Delta\vec{r})} \approx r\sqrt{1+\frac{2\Delta r}{r}} \approx r+\Delta r$

[*4] 『dt で割ること・・・』は，厳密には，もちろん『$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}$ とすること・・・』と書くべき所ですが，本書ではしばしばこの簡単化した表現を用いることにします。

とすることができます。ただし，$0 \leq e < 1$ であり，ϕ_0 は $\phi = \frac{\pi}{2}$ のとき，$r = p$ となるように $\phi_0 = 0$ と選んでいることに注意して下さい。

これを，時刻 $t = 0$ のとき，$\phi = 0$ として，t について $t = 0$ から t まで積分すると，この間に $\vec{r}$ が描いた図形（楕円の一部）の面積が求められます。

$$S = \frac{p^2}{2}\int_0^{\phi} \frac{d\phi}{(1 + e\cos\phi)^2} \tag{1.16}$$

右辺の積分は，例えば，

$$\tan\frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\psi \tag{1.17}$$

と置くと容易に行えて次の結果が導かれるでしょう。

$$S = \frac{p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\psi - \frac{e}{2}\sin 2\psi\right] \tag{1.18}$$

1.4　簡素化された運動方程式

前節で，角運動量保存則により天体 m の軌道は一平面内にあり，この面を xy 平面に選んで極座標 (r, ϕ) を採用すると単位質量当たりの角運動量 $\vec{\ell}$ は z 成分のみを持ち，これは

$$r^2\frac{d\phi}{dt} = \ell \tag{1.19}$$

と表されることを確かめました ((1.9) で導入した ℓ_z を以後は ℓ とします)。この節では，この結果を力学的エネルギー保存則からの式に用いて，軌道の分類に便利な微分方程式を求めることにしましょう。

先ず，力学的エネルギー保存則から得られた式 (1.2) を極座標 (r, ϕ) を用いた式に書き直します。このために，天体 m の速度の大きさの 2 乗 $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ を極座標で表します。これは，(1.7) と (1.8) を用いると容易に行われ，結果は $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$ と成るでしょう。これを，式 (1.2) に代入して

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - G\frac{Mm}{r} = E$$

として，更に (1.19) を用いてこの式から $\frac{d\phi}{dt}$ を消去すると，目的の r のみについての 1 階の微分方程式が得られます。これにより，現在扱っている問題は，新たな“ポテ

ンシャル”エネルギー U_{eff} の下に，r に沿って『1次元』の運動をしている質量 m の質点の運動の問題に事実上帰着されることになります。

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + U_{eff} = E \tag{1.20}$$

ここで，U_{eff} は，

$$U_{eff}(r) \equiv \frac{1}{2}m\frac{\ell^2}{r^2} - G\frac{Mm}{r} \tag{1.21}$$

と置いたもので，**有効ポテンシャル**と呼ばれています。

以上により，解くべき方程式の数は最初の6個から (1.19) と (1.20) の2個に減り，軌道を知るためにはこれら2つの微分方程式のみを連立して解けば十分であることが分かります。しかしながら，初期条件と軌道の間の関係は未だ不明です。次にこの問題を考えることにしましょう。

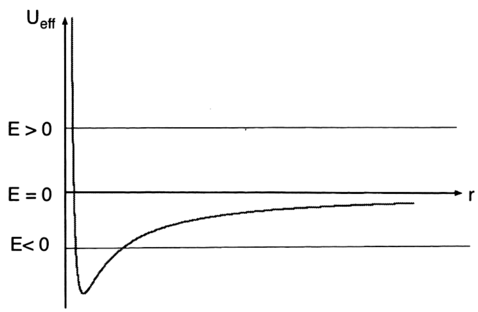


図1.4　**有効ポテンシャル $U_{\rm eff}(r)$ と力学的エネルギー E の関係：** 横軸は距離 r，縦軸は有効ポテンシャル $U_{\rm eff}(r)$。3本の直線は，上から $E>0$，$E=0$，$E<0$ の場合に対応。運動が許されるのは $U_{eff} \leq E$ が満たされる領域においてのみです。

1.5　軌道の分類

先ずこの節で，有効ポテンシャル $U_{\rm eff}$ による大まかな軌道の予測を行い，以降の節で実際に運動方程式を解くことに依り軌道の分類を試みることにします。

1.5.1 軌道の ℓ, E 依存性

初期条件によって決まる軌道の種類は，『1次元運動』の方程式 (1.20) に着目することによってその概略を知ることができます[*5]。

(1.20) の左辺の第1項は，m の1次元運動の“運動エネルギー”であるため明らかに0以上，従って与えられた E の値に対して許される軌道は

$$E \geq U_{eff}(r) \tag{1.22}$$

を満たす範囲でなければならないことが分かります。

図 1.4 はこの概略を示したものです。図の縦軸は U_{eff}，横軸は r で，3本の直線は，代表的な E の値で，それぞれ上から $E > 0$，$E = 0$，$U_{eff} \leq E < 0$ を代表しています。

条件 (1.22) により，許された軌道は各 E 値に対応する直線と U_{eff} との交点（2点，または1点と無限遠点）の間の区間に限られます。このため m の運動についてある程度の予測が可能となります。すなわち，$E \geq 0$ のときは，交点（近日点）から無限遠点までの**非周期運動**，$U_{eff} < E < 0$ の場合は，2つの交点（近日点と遠日点）の間での**周期運動**，また，2つの交点が一致する特殊な E 値 (これは U_{eff}の最小値に等しく，以後これを E_{min} とする）の場合は，同じ半径のところに留まるため**円軌道**となることが予測されます。

1.6 運動方程式を解く

軌道の概略は分かってもその正確な形は運動方程式を解かなければ知ることはできません。ここで扱う微分方程式は簡単な積分操作で初等的に解くことができます。この節ではこれについて記すことにします。

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{\ell^2}{r^2} \tag{1.23}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\ell}{r^2} \tag{1.24}$$

---

*5 初期条件として与えた惑星の位置と速度から2種類の保存量，E と ℓ の値が決まります。これらの関係については，§1.6.2 で詳しく書くことにします。

解こうとしているのは，上にまとめた簡素化した形での微分方程式です。これらを解くと，ℓ, E の各値に応じた m の時々刻々の位置を知ることができますが，ここでは軌道の形に注目することにします。

この目的のために，(1.24) を 2 乗して，これで (1.23) を割って得られる次の式に着目します。

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{2E}{m\,\ell^2}r^4 + \frac{2GM}{\ell^2}r^3 - r^2 \tag{1.25}$$

更に，この式を後に述べる相対論の式との比較を考慮して質量 M の代わりに次の量 a を導入して書き直した式を用いることにします。

$$a \equiv \frac{2MG}{c^2} = \frac{2M_\odot G}{c^2} \times mass = 2.954\ mass$$

ここで，$mass$ は太陽の質量 $M_\odot = 1.9891 \times 10^{30}$kg を 1 に取ったときの天体 M の質量で，$c$ は光速です。

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{2\hat{E}}{\ell^2}r^4 + \frac{ac^2}{\ell^2}r^3 - r^2 \tag{1.26}$$

ただし，$\hat{E} \equiv \frac{E}{m}$ と置いています。

さて次に方程式 (1.26) を解析的に解くことを考えましょう。
先ず，両辺の平方根を取り，r と ϕ の項に変数分離した後で両辺を積分すると

$$\phi = \pm\int \frac{\ell/r^2 dr}{\sqrt{2\hat{E} + \frac{ac^2}{r} - \frac{\ell^2}{r^2}}} + \text{積分定数} \tag{1.27}$$

が得られます。ここで，$\pm$ は r が ϕ の増加に従って増加するときは $+$，減少するときには $-$ です。

右辺の積分は，先ず $\frac{\ell}{r} \equiv R$ と置いて式を整理した後で，更に

$$R - \frac{1}{2}\frac{ac^2}{\ell} \equiv \sqrt{\frac{a^2c^4}{4\ell^2} + 2\hat{E}}\cos\Theta$$

と置くと容易に積分できて，次の結果が導かれます。

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos(\phi + \phi_0) \tag{1.28}$$

ここで，p, e は

$$p \equiv \frac{2\ell^2}{ac^2}, \qquad e \equiv \sqrt{1 + \frac{8\ell^2 \hat{E}}{a^2 c^4}} \tag{1.29}$$

と置いたもので，この内の p は，**半通径**（または半直弦），また e は**離心率**と呼ばれている量です。また，ϕ_0 は積分定数で，(1.27) の復号 $(\pm)$ もこの任意性に吸収させていることに注意して下さい。

1.6.1 解析解の示す軌道

解 (1.28) の示す軌道について考えましょう。簡単のため $\phi_0 = 0$ とします（これは角度 ϕ の計り始めを調整することによっていつでも可能です）。

先ず，2 つの保存量 $(\ell, \hat{E})$ によって決まる定数 p, e について考えます。r, ϕ はそれぞれ天体 M からの距離と，x 軸として選んだ M を通る直線からの回転角でした。その設定から p は $\phi = \frac{\pi}{2}$ における M からの距離に等しいことが分かります。またその定義式 (1.29) から p は，ℓ にのみ依存する量であることが分かります。これに対して，e は ℓ がある値を取るとき，エネルギー $\hat{E}$ の符号とその値に依存して $0 \le e < 1$, $1 \le e < \infty$ の値を取ることができます。これは先の §1.5 **軌道の分類**で見た $\hat{E}$ による軌道の分類を想起させます。以下これを見ることにしましょう。

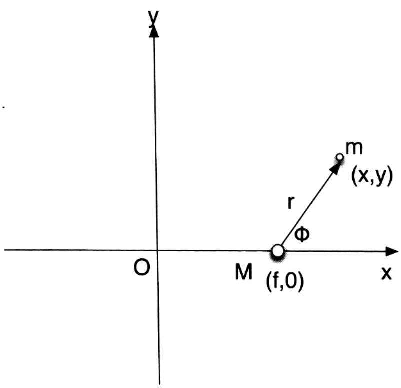


図 1.5 **直交座標系と極座標系**

先ず，(1.28) を直交座標系 (x, y) を用いて書き直します。それにより各場合につい

て，(1.28) から高校数学以来の馴染みの式（円，楕円，放物線，双曲線）が得られることを見るでしょう。

天体 M の位置を，一般に $(f,0)$ として進めましょう。このとき，天体 m の座標 (x,y) は，

$$\begin{cases} x = f + r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \tag{1.30}$$

となるため，これと (1.28) により r,ϕ を消去することによって

$$(1-e^2)(x-f)^2 + 2ep(x-f) + y^2 = p^2 \tag{1.31}$$

に導かれるでしょう。

以下，この式 (1.31) に基づいて，異なる e, p の値による軌道の相違について順次考察を進めて行くことにします。

1.6.1.1　$e = 0$ **の軌道**

この軌道は，定義式 (1.29) より $\hat{E}$ が

$$\hat{E}_{min} = -\frac{a^2c^4}{8\ell^2} \tag{1.32}$$

のときに起こることが分かります。このエネルギー $E_{min}(= m\hat{E}_{min})$ は，節 §1.5 で言及したように，有効ポテンシャル U_{eff} の最小値でもあります。そして，このときの軌道は (1.28) より M を中心とする半径 $r = p$ の**円軌道**であることが分かります。厳密には，この円軌道は，(1.31) で $e = 0$ と置いて

$$(x-f)^2 + y^2 = p^2 \tag{1.33}$$

と書かれます。

1.6.1.2　$0 < e < 1$ **の軌道**

この軌道は，

$$\hat{E}_{min} < \hat{E} < 0 \tag{1.34}$$

のときのエネルギー値 $\hat{E}$ で得られ，節 §1.5 での予測では周期軌道でした。

$1 - e^2 > 0$ であることに注意すると，(1.31) は

$$\frac{\left(x - f + \frac{ep}{1-e^2}\right)^2}{\left(\frac{p}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2} = 1 \tag{1.35}$$

と整理され，これから，軌道は $\left(f - \frac{ep}{1-e^2},\ 0\right)$ を中心に長半径 $\frac{p}{1-e^2}$，短半径 $\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$ の**楕円軌道**であることが分かります[*6]

因みに，天体 M の位置 $(f,\ 0)$ は，楕円の中心から長半径の e 倍の位置にあることより，この楕円の 1 つの焦点に当たることが分かります。

1.6.1.3　$e = 1$ の軌道

この軌道は，エネルギー $\hat{E}$ が 0 の場合に対応していて，(1.31) からは

$$y^2 = -2p\left(x - f - \frac{p}{2}\right) \tag{1.36}$$

が得られるため，M を焦点とし，$x = f + p$ を準線とする**放物線**軌道であることが分かります (図 1.6 の右図参照) 。

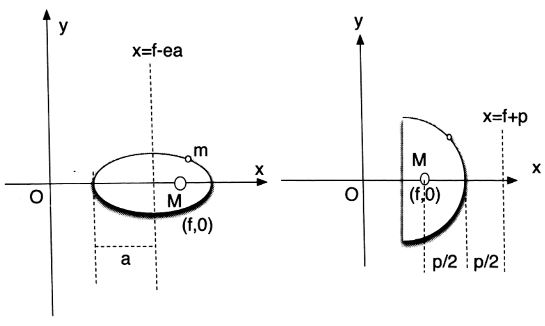


図 1.6　**左が楕円** $(0 < e < 1)$**，右が放物線軌道** $(e = 1)$

[*6] 慣習上，楕円の長半径には a，短半径には b という記号が用いられています。本書でも実験篇ではこれを用いてきましたが，ここでは a は，(1.25) の下の式で定義したように重力源の質量に関係する量として用いていることに注意してください。

1.6.1.4　$1 < e$ の軌道

このとき，$1-e^2<0$ であるため，(1.31) は次の様にまとめられます。

$$\frac{\left(x-f-\frac{ep}{e^2-1}\right)^2}{\left(\frac{p}{e^2-1}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{e^2-1}}\right)^2}=1 \tag{1.37}$$

これから，小天体 m は漸近線として

$$y=\pm\sqrt{e^2-1}\left(x-f-\frac{ep}{e^2-1}\right)$$

を持つ**双曲線**軌道上を運動することが分かります。

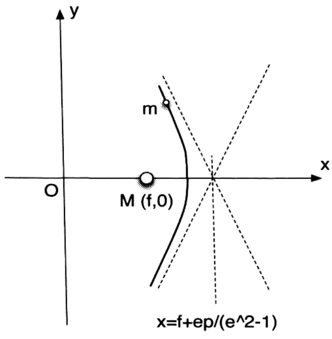


図 1.7　**双曲線軌道**

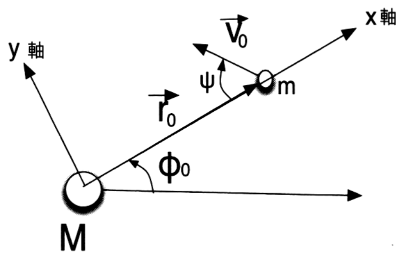


図 1.8　**初期位置と初速度**

1.6.2　初期条件と軌道

節 §1.5 で見て来たように，小天体 m がどのような軌道を描くかは保存量 E, L の値に大きく依存しています。ここでは，これらの量と，m の初期 ($t=0$ での) 位置とそのときの速度との間の関係について考えることにします。

図 1.8 のように改めて x, y 軸を選び直すことにします。このとき，初期位置での速

度 $\vec{v_0}$ の x, y 成分は，それぞれ

$$v_{0x} = \left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = -v_0 \cos\psi$$
$$v_{0y} = r_0 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)_0 = v_0 \sin\psi$$

と書かれるため，$\hat{E}$, ℓ は，(1.20) と (1.19) により，それぞれ次のように書かれることが分かります。

$$\begin{cases} \hat{E} = \frac{1}{2}\left({v_0}^2 - \frac{ac^2}{r_0}\right) \\ \ell = r_0 v_0 \sin\psi \end{cases} \tag{1.38}$$

ただし，v_0, r_0 はそれぞれ $\vec{v_0}$ と $\vec{r_0}$ の大きさです。従って，このとき，通径 p と離心率 e は，(1.29) により，それぞれ

$$p = \frac{2}{ac^2}\ r_0^2 v_0^2 \sin^2\psi \tag{1.39}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{8}{a^2c^4}\ r_0^2 v_0^2 \sin^2\psi\ \hat{E}} \tag{1.40}$$

と表されます。これから，$\sin\psi \neq 0$ を満たす ψ に対して，直ちに次のことが結論されることが分かります。

(1) $v_0 > \sqrt{\frac{ac^2}{r_0}} \left(= \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}\right)$ のとき，双曲線軌道
(2) $v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$ のとき，放物線軌道
(3) $v_0 < \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$ のとき，楕円軌道

特に，円軌道は，$\psi = \frac{\pi}{2}$ で $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$ である場合にのみ得られます。

因みに，M を地球の質量 5.974×10^{24}kg，r_0 を地球の半径 $R = 6378$km，m を人工衛星として，万有引力定数 $G = 6.674 \times 10^{-20}\mathrm{km}^{-3}\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$ を用いると，円軌道を与える速さは，

$$\sqrt{\frac{GM}{r_0}} = \sqrt{\frac{6.674 \times 10^{-20} \times 5.974 \times 10^{24}}{6378}} = 7.91\mathrm{km/s}$$

と計算されます。これが**第 1 宇宙速度**として知られる速さです。また，この $\sqrt{2}$ 倍で放物線軌道を与える速さ

$$\sqrt{\frac{2GM}{r_0}} = 11.2\mathrm{km/s}$$

が第2宇宙速度，または**脱出速度**として知られる速さです。表1.10の最下段に各惑星の脱出速度を示しています。第1宇宙速度は，これを $\sqrt{2}$ で割ると得られます。

また，M を太陽とすると，$mass = 1$，$c = 2.99792458 \times 10^5$[km/s]，そして r_0 を平均太陽半径 696000km に選ぶと，太陽からの脱出速度は

$$v_s = \sqrt{\frac{2.954c^2}{r_0}} \times 1 = 617.6 \text{ km/s} \tag{1.41}$$

と計算されます。

1.6.3　周期とケプラーの第3法則

惑星が太陽の周りを楕円運動しているときの公転周期について考えましょう。そのためには時間依存の運動方程式 (1.24) まで戻る必要があります。その中の r に，軌道の式 (1.28) を用いると，それぞれ時間 t と角度 ϕ のみを含む項に分離でき，その各々を t については 0 から T，ϕ については 0 から 2π まで積分します。

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(1 + e\cos\phi)^2} = \frac{\ell}{p^2}\int_0^T dt \tag{1.42}$$

ここでは，結果に影響が無いため $\phi_0 = 0$ としていることに注意して下さい。

この左辺の積分は，例えば，先ず $\xi = \tan\frac{\phi}{2}$ と置き，ϕ から ξ についての積分に変え，更に

$$\xi = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\eta$$

と置いて ξ から η への積分に変更することに依って容易に行うことができます。結果として次の関係が導かれるでしょう。

$$T = 2\pi\frac{p^2}{\ell}(1-e^2)^{-\frac{3}{2}} \tag{1.43}$$

更に，この式の ℓ, p, e の代わりに (1.38) と (1.39), そして (1.40) を代入して整理することによって次の結果に導かれます。

$$T = \frac{\pi a c^2}{\left(\frac{ac^2}{r_0} - v_0^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{1.44}$$

この式から，**軌道の周期** T **は，初期位置** r_0 **と初速度の大きさ** v_0 **のみに依存し，打ち出しの方向** ψ **には依存しない**ことが分かります。

次に，周期 T を楕円の長半径と短半径を用いて表すことを考えましょう。そのために，長半径を a，短半径を b として，混同を避けるために節 §1.6 で導入した重力源の質量を表す a の代わりに元の GM を用いることにします。

先ず，遠日点 r_a と近日点 r_p と，a, b との間の関係

$$r_a + r_p = 2a, \tag{1.45}$$

$$r_a - r_p = 2ae, \tag{1.46}$$

$$r_a\ r_b = b^2 \tag{1.47}$$

に着目します。これらを用いることによって，軌道の式 (1.28) から直ちに

$$p = \frac{2}{u_a + u_b} = \frac{b^2}{a} \tag{1.48}$$

$$e = \frac{u_p - u_a}{u_a + u_p} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \tag{1.49}$$

が導かれます。ここで，便宜上 $u_a = \frac{1}{r_a}$, $u_b = \frac{1}{r_b}$ と置いています。これらを (1.43) へ代入して整理すると

$$T = \frac{2\pi}{\ell} ab$$

が得られます。更に，これに (1.29) より得られる関係

$$\ell = \sqrt{MG}\frac{b}{\sqrt{a}}$$

を代入することによって

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}\ a^{\frac{3}{2}} \tag{1.50}$$

が導かれます。これはケプラーの第 3 法則そのものですね。

1.6.4 数値的に解く

以上のように，ニュートン力学の場合には運動方程式は解析的に容易に解くことができました。しかし，相対論の場合にはそう簡単にはいきません。そのような場合には数値解を求めてその結果を可視化して見ることによってその概略を知ることが必要に成って来ます。本書では，4 次のルンゲ・クッタ法を用いて C/C++ でプログラミングしたプログラムを用いて運動方程式を解き，更にその結果を可視化して見るため

に OpenGL を利用するプログラムを書いてその運動を調べることが目的でした。その目的のためにルンゲ・クッタ法についてその概略を知ること（知っていること）は，それを用いるためにどのようなプログラムを書けば良いかの重要なヒントとなります。そのためにも，ルンゲ・クッタ法について簡単に復習しておくことにしましょう。

■ルンゲ・クッタ法とは　簡単に言えば，変数（例えば，時間 t）の定義された範囲を予め決めたステップに細かく分割して，ステップの始めに指定した関数値と導関数値のセット（初期値）の情報から，次のステップでの値を近似的に決め，更にその値から次のステップでの値を決め，・・・，という操作を続けるアルゴリズムで，1階の連立常微分方程式を数値的に解く場合によく用いられる方法です。ここでの「4次の」ように，前に付く次数は精度を表しています。この数値が大きい程誤差が少なくなる様な近似計算の手法が取られています。詳しくはネットなどで検索してください。

ルンゲ・クッタ法を用いるためには，先ず任意の常微分方程式を1階の連立常微分方程式の組みへ変換する必要があります。

次の2階の常微分方程式を解かせる場合を考えてみましょう。

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{f}\left(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right) \tag{1.51}$$

この微分方程式は $\vec{r} = (x, y, z)$，$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = (v_x, v_y, v_z)$，$\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$ と置くと次の1階連立微分方程式の形に書き変えることができます。

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ f_x(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z) \\ f_y(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z) \\ f_z(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z) \end{pmatrix} \tag{1.52}$$

この形に書くことによってルンゲ・クッタ法のプログラムに容易に載せることができます。

■応用例　さて，応用例として，方程式 (1.26) から上の形の連立微分方程式を作る場合を考えましょう。

(1.26) は既に1階なので面倒はないように思われますが，ルンゲ・クッタ法を用いるためには左辺の2乗は困ります。従って，この平方根を取りますが，その際符号が問題になってきます。前にも指摘した様に r が変数 ϕ の単調増加関数か単調減少関

数であれば問題はないのですが，実際にはそのようなことは仮定できません。いつ増加から減少に，或は減少から増加に転ずるかをプログラムで見張っておかなくてはなりません。それを怠るととんでもない軌道が描かれてしまうことになります。ここでは折角1階になっていますが，もう一度微分して2階の微分方程式に直すという些かトリッキーな方法で対処することにします。ちょっとした計算の後で次の結果が得られるでしょう。

$$\frac{d}{d\phi}\begin{pmatrix} r \\ u_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_r \\ \frac{4\hat{E}}{\ell^2}r^3 + \frac{3ac^2}{2\ell^2}r^2 - r \end{pmatrix} \tag{1.53}$$

ここで，1行目の $\frac{dr}{d\phi} = u_r$ は u_r の定義だと考えて下さい。

■初期条件 (1.53) を解くためには初期条件，つまり $t = 0$ での天体 m の位置と速度（それぞれ (x_0, y_0) と (v_{x0}, v_{y0}) とします）から対応する r と u_r の値（それぞれ r_0，u_{r0} とします）と保存量 $\hat{E}$ と ℓ の値を求めておくことが必要です。ここでこれらを決める式を求めましょう。もちろん r_0 は，$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ ですね。

次に，u_{r0} を求めるために，直交座標と極座標の関係に注意して速度の間の関係が次式のようになることを確かめます。

$$\begin{cases} v_r = v_x\frac{x}{r} + v_y\frac{y}{r} \\ v_\phi = -v_x\frac{y}{r} + v_y\frac{x}{r} \end{cases} \tag{1.54}$$

ここで，$v_r \equiv \frac{dr}{dt}$，$v_\phi \equiv r\frac{d\phi}{dt}$ と置いていることに注意してください。

求める u_{r0} は，これらの式から直ちに導かれます。

$$u_{r0} = \left(\frac{dr}{d\phi}\right)_0 = \frac{r_0 v_{r0}}{v_{\phi 0}} = \frac{r_0(x_0 v_{x0} + y_0 v_{r0})}{-y_0 v_{x0} + x_0 v_{y0}} \tag{1.55}$$

一方，保存量 E, ℓ の方は，特に $t = 0$ でなくいつ決めても良いのですが，$t = 0$ で決めることにすると (1.54) の初期値（添字0を付けて表します）と (1.24) と (1.23) 式から

$$\ell = r_0 v_{\phi 0} \tag{1.56}$$

$$\hat{E} = \frac{1}{2}\left(v_{r0}^2 + v_{\phi 0}^2 - \frac{ac^2}{r_0}\right) \tag{1.57}$$

と求まります。

以上でプログラムするために必要な情報が全て揃いましたが，最初に書いたように，本書付属のアプリはこれに依ってプログラムしたものではないことに注意して下さい。

第 2 章

特殊相対論入門

相対論については実験篇の第 1.1 章で簡単に説明しましたが，この章から相対論に基づく光や粒子の軌道についての調査を目標に，少し冗長にはなりますが，初心者を考慮して，特殊相対論の基礎から始め，一般相対論，アインシュタイン方程式とその簡単な解（シュワルツシルド解），そして目的のその解が与える時空内に置かれた粒子や光の振る舞いについて順次見て行くことにしましょう。

2.1 なぜ相対論は必要か

先ずは相対論が必要とされるに至った歴史的経緯から始めましょう。

2.1.1 歴史的背景

空間と光の認識の変遷

先ず初めに，相対論や宇宙論に深く関わりのある『空間と光』について，その認識の移り変わりを，主だった人物を中心に簡単に概観しておきましょう。

■空間について

[1] **アリストテレス**は，「自然は真空を嫌う」という命題から出発して，『空（から)』の空間は存在出来ないと考えました。従って，宇宙は，ある実体（エーテル (Ether)）で満たされていると結論しました[*1]。

[*1] エーテルは相対論によってその存在が否定されましたが，現在の観測では宇宙を満たすダークエネルギーの存在が予測されています。その種々の候補からエーテルをその一つとして考える人達もい

[2] **デカルト**は,『プレナム (plenum)』と呼ばれる物質が全宇宙を占めていて，この渦が惑星を軌道運動させ，光は，観測者と観測されるものとの間にあるこのプレナムの瞬間的な乱れであって，瞬時に伝播するものであると考えました。

[3] **ニュートン**（1687年に出版した『プリンキピア』によって万有引力の法則や運動の3法則の発見者として知られています）は，デカルトの幾何学を学んでいましたが，空間は『空』で絶対的であると信じていました。そのため，彼は，『重力的に引きあう物体間には物質はなく，その間に働く力は，それらの距離の2乗に反比例して変化する』として万有引力の法則を考えました。しかし，この考えは，重力を伝える力学的なメカニズムを明らかにしていないということでホイヘンスや当時の多くの人々には不評でした。

■光について

[1] **ガリレオ**（木星の衛星，イオ，エウロパ，ガニメデ，カリスト（いわゆる，ガリレオ衛星）の発見で有名です）は，1667年に光の速さを測定しようとしましたが，測定器の精度が足りなかったために失敗しました。

[2] **レーマー**（Rømer）は，１０年間に渡って，イオの軌道運動の周期を観測して，その周期が木星から地球が遠ざかるとき長くなることに気が付きました。そして，その理由をイオから地球へ光が伝わるために必要な時間から来るとしてこの事実を1676年に発表しました。

[3] **ホイヘンス**は，自分の光の波動説の根拠として光速の有限性を上げていましたが，レーマーの発表の2年後，その速さを $231,696km/s$ と初めて数値的に見積もりました。

[4] **ニュートン**は，光を空（から）の空間を運動する『微粒子』(Corpuscles) と呼ぶ粒子の集合で，各「微粒子」は異なる光の色に対応していて，異なる速さで運動していると考えました。しかし，ニュートンの理論では光の回折現象は説明出来ませんでした。

[5] **オイラー**は，1746年，光はエーテル中の波動的振動であるとする『光と色の新理論』を発表しました。

[6] **ヤング**は，オイラーの波動論をホイヘンスの原理を用いて説明しました。

[7] **ヤングとフレネル**は，干渉と回折を例に取って，光が粒子としては説明出来ない波動性を持つことを示しました。

ます。名前はともかくとしてアリストテスの予測は真理であるのかもしれません。

[8] **マックスウェル**は，1862 年，『光が電気的磁気的な現象を引き起こす媒質の振動であることは，もはや疑いようがないことである』として，仮想媒質「エーテル」中を伝播する光の電磁波説を提案しました。光の電磁波説はヘルツにより実験的に証明されましたが，媒質については，単なる仮定で根拠としたマックスウェル方程式からは得られませんでした。

[9] **ヘルツ**は，1887 年，マックスウェル理論による光の電磁波説を実験的に確かめました。ループ状の針金でラジオ波を作り，そのラジオ波の速さが光の速さと一致することや，光と同じように屈折，反射，干渉，回折現象を引き起こすことを示しました。

[10] 波動説で決着が着いたかに見えた 1905 年，**アインシュタイン**は，プランクのエネルギー量子の仮説（1900 年）に基づき，光電効果の説明のために光量子説を提唱し，同時に光の媒質としてのエーテルの存在を否定して，後に特殊相対論として知られる理論を発表しました。

[11] **アインシュタイン**は，1916 年頃，特殊相対論を重力の問題に適用するために特殊相対論の拡張に迫られ，重力を時空の曲がりとして表現する一般相対論に到達しました。これにより，1687 年にニュートンに依り提唱された万有引力の法則の不評の原因であった何も無い空間を飛び越しての作用は，曲がった時空を介しての作用として説明されたのです。

2.1.2 電磁波としての光

前節に書いたように，光は今では他のミクロ粒子と同様に，『波動』と『粒子』という相反するように見える 2 重の側面を持つ実体として知られていますが，この節では，特殊相対論を生み出す契機となった『電磁波としての光』についてレビューすることにします。

2.1.2.1 マックスウェル方程式

電気を帯びた物質が周りに電場 (電界) を作ることや，電流が流れると周りに磁場 (磁界) ができることは良く知っている現象でしょう。これらの電気や磁気に関する現象は，クーロン，アンペール，ファラデーやマックスウェルといった代表的な人々の他にも多くの人々により研究され，最終的にマックスウェルにより次の 4 つの式の組にまとめられました。

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2.2}$$

この式中の ρ と $\vec{j}$ は，それぞれ与えられた電荷と電流の分布の密度を表しています。一方，$\vec{E}$, $\vec{H}$ は，各々，これらの方程式の解として得られ，与えられた電荷と電流分布によって生み出される電界と磁界とを表しています。また，$\vec{D}$,$\vec{B}$ は，真空中のみならず物質中での電界や磁界の様子を記述するために導入された量で，それぞれ電束密度，磁束密度と呼ばれています。普通の物質の場合は，$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$ の関係で書かれます。このとき，係数 ϵ と μ は，それぞれその物質の誘電率，透磁率と呼ばれ，その物質に固有の電気的，磁気的な性質を表しています。

SI 単位系では，真空も一種の物質として扱われ，その誘電率と透磁率に次の一定値が与えられています。

$$\epsilon_0 = 8.854187818 \times 10^{-12}\ [F/m] \tag{2.3}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ [H/m] \tag{2.4}$$

2.1.2.2　**波動方程式**

電荷の分布も無く，電流も流れていない（従って $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$ の）真空中における電界 $\vec{E}$ と磁界 $\vec{H}$ の様子を知るためにマックスウェル方程式を考えましょう。このときの $\vec{E}$, $\vec{H}$ は次の方程式の解と成ります。

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \qquad \nabla \cdot \vec{H} = 0 \tag{2.5}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{2.6}$$

これらの式から，$\vec{E}$ のみ（または $\vec{H}$ のみ）の式を作ります。この目的のために，下 2 式の各々について“回転”を取り（つまり左より $\nabla\times$ を作用して），上 2 式を用います。これにより次の 2 式が導かれるでしょう。

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = 0 \tag{2.7}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \Delta \vec{H} = 0 \tag{2.8}$$

これらの式中の Δ は，デカルト座標系 (x, y, z) では

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

と表されるラプラス演算子として知られている微分演算子を表しています。また，c は，以下に示した式の真ん中の式をそう定義して置いたもので，この式に前節の真空の誘電率 ϵ_0 と透磁率 μ_0 の値を代入して計算して得られた数値が最右辺の値です。これが真空中での光速の測定値に等しいことは良く知られているところでしょう。

$$c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.998 \times 10^8 \quad [m/s] \tag{2.9}$$

2.1.2.3　波動方程式の解

上に得た式 (2.7) と (2.8) が，波の伝播を表す方程式（波動方程式）であることはよく知られているところですが，ここでその理由を簡単にレビューした後で，これらから得られる事柄について説明することにしましょう。

先ず始めに，(2.7) と (2.8) とは，電界 $\vec{E}$ と磁界 $\vec{H}$ それぞれについて（従ってそれらの各成分について）同じ方程式であることに着目しましょう。これにより，代わりに次のこれらと同タイプの方程式

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \psi = 0 \tag{2.10}$$

を考えれば十分であることが分かります。

(2.10) において，ψ が時刻 t と座標の一つ，例えば x のみの関数であると仮定すると，この方程式の最も簡単な解を得ることができます。今，この仮定をすると，(2.10) は

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial (ct)^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial ct} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial ct} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = 0 \tag{2.11}$$

と書き直されます。

容易に分かるように，この方程式の一般解は，

$$\psi = f(x - ct) + g(x + ct) \tag{2.12}$$

と書かれます[*2]。ここで，f，g は，それぞれ $x-ct$ と $x+ct$ の任意の関数です。

先に進む前に，変数 $x-ct$ と $x+ct$ に少し細工をして

$$x-ct=x-\lambda\nu t=\frac{\lambda}{2\pi}(\frac{2\pi x}{\lambda}-2\pi\nu t)=\frac{\lambda}{2\pi}(kx-\omega t)$$
$$\text{ただし，}\quad c=\lambda\nu,\quad k=\frac{2\pi}{\lambda},\quad \omega=2\pi\nu$$

と置くと，この解は次の形にも書かれることに注意しておきます。

$$\psi(t,x)=f(\omega t-kx)+g(\omega t+kx) \tag{2.13}$$

さて次に，この解の意味を考えましょう。今，変数 t,x が，$ct-x=\xi(=\text{一定})$，または $ct+x=\eta(=\text{一定})$ を満たすように変化するとします。言い換えると，点 x が，t の変化と共にそれぞれ

$$x=ct-\xi,\qquad \text{または}\quad x=-ct-\eta \tag{2.14}$$

と変化するとします。これらは，明らかに同じ c の速さで，それぞれ x 軸の正方向（右向き）と負方向（左向き）に進む点 x を表すと同時に，異なる ξ と η に対応して異なる位置から同じ速さ c でそれぞれ右に向かう，または左に向かう点列を表しています。

一方，これを解 $\psi(t,x)$ の立場から見ると，点列 x が同じ速さ c で右向きに進むときは，対応する $f(\xi)$ の値のそれぞれが一定のままに，また，点列が左向きに進む場合は，対応する $g(\eta)$ の値のそれぞれが一定のまま保たれることを意味しています。

ところで，ξ，η を変数と看做して，x,t の代わりに用いると (2.13) は，

$$\psi(\xi,\eta)=f(\xi)+g(\eta) \tag{2.15}$$

[*2] この解の導出は，x,t から新しい変数のセット ξ,η へ

$$\xi=x-ct,\qquad \eta=x+ct$$

と変数変換して

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta},\qquad \frac{\partial}{\partial ct}=-\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}$$

を確かめれば容易です。元の式に，これらの関係を用いると

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)=\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)=0$$

が得られます。これらの式から，任意の関数を f，g として $\psi=f(\xi)+g(\eta)$ が解であることは，$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial f(\xi)}{\partial\xi}\right)=0$ 等が成り立つことより明らかでしょう。

として $(\xi,\ \eta)$ の関数と看做すことができます。しかし，この関数は，一般の２変数の関数と比較して特別 — 例えば，ξ のみを変化させても $g(\eta)$ の方は一定のままという性質を持つ— です。このため，$f(\xi)$ と $g(\eta)$ とは独立して扱うことができます。

以上のことから次の結論が導かれます。

『ξ(または,η) の取る値それぞれに対応した関数値 f(または, g) に結びついて，点 x と連動して速さ c で動くある量（実体）が存在する。』

このことは，f, g が周期的であると仮定し，その内の最も基本的な次の関数を考えるとより明確になるでしょう（もちろん，sin の代わりに cos でも ok です。これらは単に位相が $\frac{\pi}{2}$ 異なるだけで，本質的な違いはありません)。

$$f = a\sin(\omega t - kx), \quad g = a\sin(\omega t + kx) \tag{2.16}$$

ここで，x の移動の速さ c を**位相速度**，関数値 f, g を**変位**と呼ぶと，これらの式は，それぞれ，変位が速さ c で右に伝わる単色平面波と，同じ速さで左に伝わる単色平面波を表す式に一致することが分かります。そしてこのときは，a は振幅，k は波数，ω は角振動数（角周波数）と呼ばれている量と看做せます。因に，周期性を持つ任意の波は，基本の整数倍の波数と角振動数を持った色々な振幅の単色平面波の重ね合わせに依って，また，周期性を持たない波束などは，連続的に分布した波数と角振動数を持った色々な振幅の単色平面波の重ね合わせに依ってそれぞれ表現できることが数学的（フーリエ級数やフーリエ積分）に知られています。

2.1.2.4 電磁波

前節で見て来たように，真空中で成り立つマックスウェル方程式から，光速 c で伝播する電磁波の存在が予測されます。この波の基本的なものは，前節の議論での kx を $kx \to \vec{k}\cdot\vec{r}$ と３次元に拡張して，その各々が c の速さで $\vec{k}$ 方向へ伝播する単色の２種類の平面波

$$\vec{E} = \vec{E}_0\ e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}, \tag{2.17}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0\ e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}, \tag{2.18}$$

を構成波として持つ波でしょう。ただし，ここで $\vec{k}$ は，その向きを波の伝播方向に持つ波数ベクトルです。また $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ は，共に定数ベクトルを表しています。

これら $(\vec{E},\ \vec{H})$ を成分波として持つ本体の波，電磁波が横波であることは，(2.17) と (2.18) とを，それぞれ (2.5) へ代入して得られる関係式

$$\vec{k}\cdot\vec{E} = 0, \qquad \vec{k}\cdot\vec{H} = 0 \tag{2.19}$$

より知ることができます。また，これらの成分波が互いに直交していることも，(2.6) へ (2.17) と (2.18) とを代入して得られる式

$$\vec{H} \times \vec{k} = \epsilon_0 \omega \vec{E}, \qquad \vec{k} \times \vec{E} = \mu_0 \omega \vec{H} \tag{2.20}$$

より知ることができます[*3]。因みに，これら2式は，$\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ であることを考慮に入れれば本質的に同じです。

2.1.2.5 物質中での位相速度

最後に，一様な空気中や水中などのような一定の誘電率 ϵ と透磁率 μ を持った一様な物質中に入射したときの電磁波の位相速度について考えましょう。もちろん，この物質中には，入射した電磁波とは別の電界や磁界を生み出す電荷の分布も電流の流れもないとします。このときは，ただ

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu \vec{H} \tag{2.21}$$

と置けば，後は今までと同じ議論を繰り返すだけで次の結果に達することができるでしょう。

$$c' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n} \tag{2.22}$$

ここで，$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ と $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$ とは各々，物質の真空に対する比誘電率，比透磁率で，$n = \sqrt{\epsilon_r\mu_r}$ は物質の屈折率に対応します。

この結果から，例えば，これに良く知られた水の屈折率の近似式 $n = \frac{4}{3}$ を代入して見ると，水中での電磁波の位相速度は，真空中でのそれの $\frac{3}{4}$ 倍となることが分かります。もちろんこれは屈折率の定義からすれば本末転倒でしょうが。

2.1.3 相対論が必要な理由

前節で見たように，マックスウェル方程式の解として，$c(= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}})$ の速さで真空中を伝播する『電磁波』の存在が予見され，後のヘルツの実験によりこれがすべて光と同じ振る舞いをすることが示されたことにより，光の波動説が完全に勝利したように見えました。しかし，光の波動説には『媒質は何か』という根本的な問題がありました。というのは，マックスウェル方程式は，波動解は与えるが媒質に関する情報は何も与えてくれなかったためです。

[*3] 外積（ベクトル積）の定義により，最初の式で $\vec{E}$ は $\vec{H}$ と $\vec{k}$ の作る平面に垂直であることが分かりますね。

と言うわけでこれ以降，光の媒質を求めての研究が進められて行ったわけですが，これについては後回しにして，実はマックスウェル方程式の解としての電磁波についてはもう一つの大きな問題が有ったのでこれを先に書くことにします。

2.1.3.1　マックスウェル方程式が成り立つ基準系は？

電磁波（光）が定まった速さ $c = 2.998 \times 10^8 [m/s]$ で真空中を伝播することは認知されましたが，では一体**この速さ c はどの様な観測者から見た速さ**なのでしょうか?

■力学の速度合成則　ニュートン力学 (単に力学，またはしばしば古典力学と呼ばれています) は，その第 1 法則 (慣性の法則) において，『力が働かなければ静止している物体はいつまでも静止したままであり，等速直線運動している物体は速さも向きも変えることなくいつまでもその運動を続ける』ような基準系 (**慣性基準系**[*4]) の観測者が存在することを主張し，第 2 法則（運動の法則）で，力学現象はそのどのような慣性観測者が記述してもその運動状態に関係なく同じ関係式で表現されることを主張しています。このことを数学的に言えば，物体の運動を記述する**力学の基礎方程式は慣性系間の変換 (ガリレイ変換) の下に不変である**ように作られていると言えます。次に，このことから得られる結論についてもう少し詳しく説明しましょう。

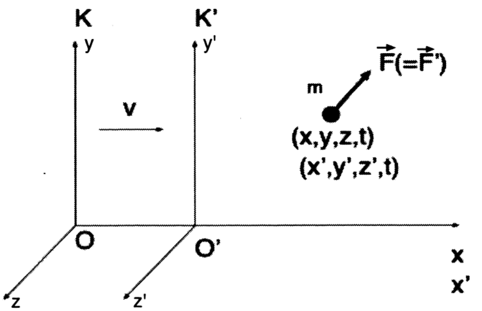


図 2.1　慣性系間の変換（ガリレイ変換）

図 2.1 のように，対応する座標軸が互いに平行になるように設定された 2 つの慣性系 K と K' があるとします。そして，K 系から見ると，K' 系は x 軸に沿って一定の

[*4] 基準系は，電車とかの乗り物をイメージすればよいでしょう。また以後は，基準系は単に系，慣性基準系は単に慣性系，そして慣性系にいる観測者を慣性観測者と呼ぶことに注意して下さい。

速さ V で運動しているとします。

今，これら２つの系の観測者が，外力 $\vec{F}$ の作用の下に運動している質量 m の質点の運動を力学に従って記述したとします。その結果は以下のようになるでしょう。

$$K: \quad \begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \\ m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y \\ m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad K': \quad \begin{cases} m\frac{d^2x'}{dt'^2} = F_x \\ m\frac{d^2y'}{dt'^2} = F_y \\ m\frac{d^2z'}{dt'^2} = F_z \end{cases}$$

ところで，これら２式は，次の**ガリレイ変換**と呼ばれている変換式によって互いに他方から求めることができることに注意して下さい。

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \text{或は} \quad \begin{cases} t = t' \\ x = x' + Vt \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

この考察から次の２つの重要なことが分かります。先ず第１は，力学は**絶対時間の概念**を前提としていること。第２に，K 系と K' 系から見た質点の各速度 $\vec{v}$ と $\vec{v'}$ の間には

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{V} \tag{2.23}$$

なる関係が成り立っていることです（ガリレイ・ニュートンの速度合成則と呼ぶことにします)。

次に，この**速度合成則**に，粒子の代わりに『光』を当てはめてみるとどのようなことが結論されるかを考えてみましょう。

ある慣性系 K においてマックスウェル方程式が成り立ち，従ってこの系においては電磁波の速さが $c = 2.998 \times 10^8[m/s]$ であったとします。このとき，上の合成則 (2.23) によると，K に対して速さ V で，電磁波の伝播方向と同じ方向に運動している別の慣性系 K' では電磁波の速さは $c - V$ とならなければなりません。しかし，この結論は，マックスウェル方程式と相容れません。なぜならもしマックスウェル方程式が成り立つなら必然的な帰結として $c = 2.998 \times 10^8[m/s]$ の速さで伝播する電磁波が存在することになるからです。

こうして，冒頭で述べた疑問，或は同じことですが『マックスウェル方程式は，一体どのような慣性系で成り立つのだろうか？』という疑問に行き当ります。

この答えに対して，相対論成立以前には，マックスウェル方程式は全ての慣性系で同じ様に成り立つのではなく，全宇宙に対して静止しているただ一つの基準系である

『絶対静止系』においてのみ成り立つと考えられたりもしました[*5]。この問題を巡っての論争は，電磁波の媒質としての仮想物質『エーテル』を巡っての論争と合わせて相対論成立直前の，というか相対論へと導く大きな原動力となったのです。

2.1.3.2　光の媒質を求めて

当時，『波』には媒質は不可欠と考えられていたので『エーテル』を求めての調査研究は最重要課題でした。ここでは最も有名なマイケルソン・モーレー (Michelson-Morley) の実験について，巻末の参考文献 [10] を参考に説明することにしましょう。

■マイケルソン・モーレーの実験　絶対静止系の存在の可否や，絶対静止系に対して静止していると考えられる『エーテル』の調査のために，マイケルソンとモーレーは次のような実験を行いました。

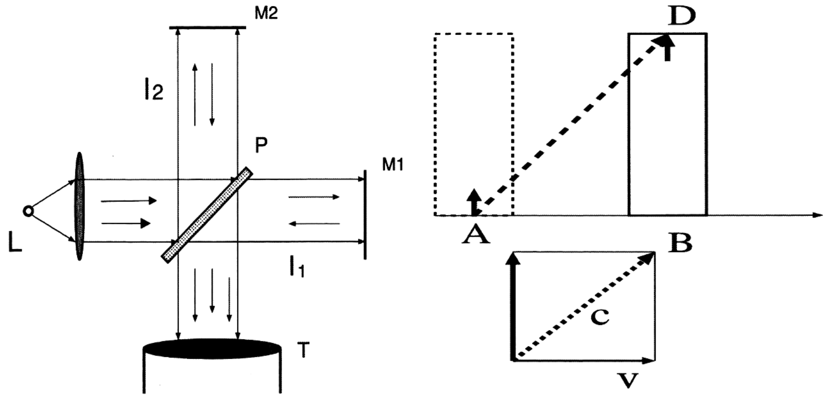


図 2.2　マイケルソン・モーレーの実験

想定した絶対静止系 K_0 での光の速さを c，絶対静止系に対する地球上の実験室 K の速さを v とします。今，図 2.2 の上図の装置が地球の運動と共に K_0 系に対して左から右へ v で運動しているとして，速度合成則 (2.23) を用いると次の結論が導かれます。

---

*5 宇宙は今のように動的に変化するものではなく，その中に存在するすべてのものを入れる容器のようなものと考えれば『絶対静止系』を想像することは容易でしょう。

(1) 光源 L を発して半メッキしたガラス板 P を透過し反射鏡 M_1 に至る光の速さは $c-v$

(2) 同じ光が反射鏡 M_1 で反射して L に向かって戻るときの速さは $c+v$

これを用いると，光が $P \to M_1 \to P$ と往復するために要する時間は

$$t_1 = \frac{\ell_1}{c-v} + \frac{\ell_1}{c+v} = \frac{2\ell_1}{c}\frac{1}{1-\beta^2}$$

と計算されます。ただし，$\beta = \frac{v}{c}$ と置いています。

一方，P で反射して反射鏡 M_2 へ向かう光の速さは，図 2.2 の下図のように装置が A の位置から B の位置に来るまでに，実験室の観測者は，絶対静止系に対して静止しているエーテル中に起こった振動としての光の内で A から D へ向かう光を，装置の中を往復する光の往路の部分として観測することになるため，その P から M_2 に向かう速さを，速度合成則 (2.23) を用いて $\sqrt{c^2-v^2}$ と結論するでしょう。また，復路についても同様のことが言えることに注意すると，光が $P \to M_2 \to P$ と往復するために要する時間は

$$t_2 = \frac{2\ell_2}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2\ell_2}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

となります。こうして PM_1P と PM_2P との光路差 Δ は

$$\Delta = c(t_1 - t_2) = 2\left(\frac{\ell_1}{1-\beta^2} - \frac{\ell_2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

となります。ところで，一般に同じ光源から発せられた光が何らかの方法で 2 つの異なる経路に分けられて後再び合わされると干渉することが知られています。この干渉の様子を観測装置 T で干渉縞として観測する訳です。実験は同じことを装置全体を 90 度回転して干渉縞の移動を計り出すと云う方法で行われたのです。

ニュートン力学に従って上に得た光路差 Δ を用いると，装置の回転による予想される干渉縞の移動は

$$\begin{aligned}
\Delta' - \Delta &= 2\ell_1\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{1-\beta^2}\right) \\
&\quad + 2\ell_2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{1-\beta^2}\right) \\
&= 2(\ell_1+\ell_2)\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{1-\beta^2}\right) \\
&\cong -(\ell_1+\ell_2)\beta^2
\end{aligned}$$

となります。これにデータ $\ell_1 \approx \ell_2 \approx 11m$ と地球の公転速度 $30km/sec$ に自転速度 $\sim 1700km/h$ まで考慮して

$$|\Delta' - \Delta| \approx 0.4\lambda$$

程度と予想されましたが，実際の観測値は $\sim 0.01\lambda$ 程度以下で四季による変動も認められなかったと言うことです。ここで，λ は測定に用いた光の波長です。もちろん，これ以後，多くの人々によりより精度を上げた同種の実験が行われたことは言うまでもないことでしょう。それらの実験は，この差がますます 0 に近づくという結果をもたらしました。

この事実を巡り，仮想『エーテル』についての様々な推測がなされましたが，何れも決定打とはなり得ませんでした。

2.2 特殊相対論の基礎

2.2.1 アインシュタインのアイディア

マイケルソン・モーレーの実験が，エーテル中を運動している光源が発した光の速さが方向によらず一定であることを示していたにも関わらず，当時の光の波動説を強く信じる人々は，この結果を受けても媒質としての『エーテル』に様々な奇妙な性質を付加して『エーテル』説を擁護しようとしていました。それは，偏に『波には媒質が必要である』という当時の常識に縛られていたことによるのかもしれません。

2.2.1.1 指導原理

このような状況にあって，アインシュタイン（Einstein）はこの否定的な実験結果を素直に受け入れて次のような考えに到達しました。

[1] 『絶対静止系』という特別な基準系は必要ではなく，全ての慣性系は同等で，力学的のみならず電気，磁気的な現象も含めた全ての自然現象は，全ての慣性系で本質的に同じで，同じように記述されるべきである。

[2] 電磁波 (光) は媒質を必要とせず，真空中を光源の運動とは関係なく，またどのような基準系から見ても同じ速さ c で伝播する。

アインシュタインがこのような当時の常識からは大きくかけ離れたアイディアを持つに至った背景には，1900 年におけるプランクの**エネルギー量子**の発見が大きな影響を与えていたものと思われます。このことは 1905 年における光電効果を説明するために導入した『**光量子の仮説**』と同時期に特殊相対論を発表していることからも窺

われます。『光量子説』によれば光は『粒子』であるため媒質を必要としないことは自然に納得が行くでしょう。

上の2つのアイディアは後に，[1] はアインシュタインの相対性原理，[2] は光速度不変の原理と呼ばれるようになりました。アインシュタインはこの2つの基本原理に導かれて新しい力学である特殊相対性理論を作り上げました。

この理論においては，マックスウェル方程式は，もちろん基本的には変更を受けませんが，後に見るように表現形式は3次元のベクトル形式から4次元のテンソル形式へと書き直されます。また，この新しい理論では，速度合成則 (2.23) は，$c + v \to c$ と成るような新しい速度合成則に置き換えられます。

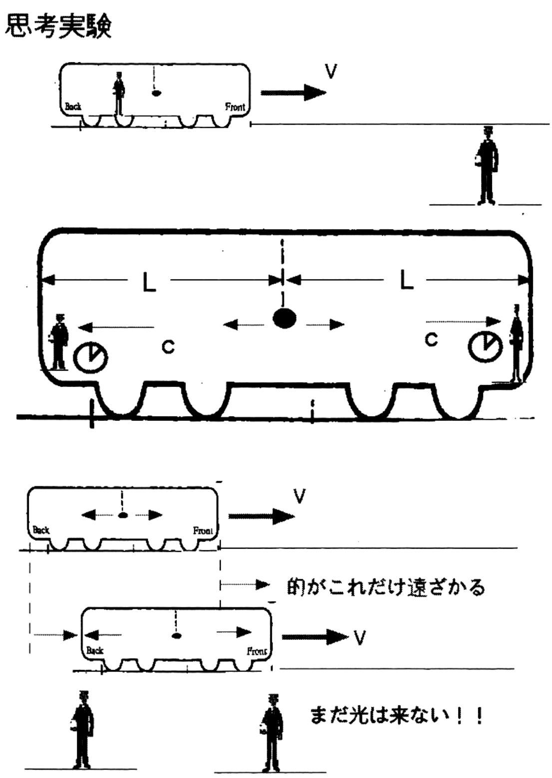


図 2.3　同時刻の相対性

2.2.1.2 思考実験

真空中の光の速さが，光源や観測者の運動状態によらず常に一定という事実，つまり前述の第2の原理（光速度不変の原理）を受け入れるなら，直ちに時間の概念の変更に迫られることが分かります。これを知るために，アインシュタインに依る次のような思考実験を考えてみましょう。

地上の観測者に対して光速 c に近い速さ V で一直線上を一定の速さで運動している電車を想定します (図 2.3 参照)。

(1) 電車内の中央にいる観測者 P が灯をともすと，
(2) 電車内で，先頭にいる観測者 Q は，時刻 $t_Q = \frac{L}{c}$ 後に P が発した光を受け取るでしょう。ただし，L は電車半両の長さです。
(3) 電車内の後尾にいる観測者 R も，Q と同一条件であるため，Q と同じ時刻 t_Q に受け取るでしょう。
(4) 電車外（地上にいるとします）で電車の先頭近くにいる観測者 Q' は，地上から見ても光の速さはやはり c であるため，地上から見ると電車の先頭は，光がそこへ届くまでに L からなお $Vt_{Q'}$ の距離遠ざかっているため，結局時刻 $t_{Q'} = \frac{\frac{L}{c}}{1-\frac{V}{c}}$ 後に，P が発した光を受け取ることになります。
(5) 電車外で電車の後端近くにいる観測者 R' は，光がそこに達する前に電車の後端は $Vt_{R'}$ だけ光に向かって進むために，時刻 $t_{R'} = \frac{\frac{L}{c}}{1+\frac{V}{c}}$ 後に，P が発した光を受け取ることになります。

この例は，２つの出来事 (しばしば**事象，またはイベント**と呼ばれます) が，ある基準系 (今の場合，電車内の観測者がその中で定めた座標系と時間) で見れば同時ですが，他の基準系 (地上の人が定めた座標系と時間) で見れば，同時でないということがあり得ること[*6]，更には，時間の進み方が基準系により異なるかも知れないという事実を暗示しています。

問 上の例では，電車の中央で発した光が電車の両端に到達するという二つの出来事を電車内で観測すれば同時で，地上で見れば，後端の方へ早く到達したという結論でした。では先端に達する方が早かったとする観測者がいるでしょう

[*6] 出来事によっては，どのような基準系から見ても常に他方よりもう一方の方が早く起こり，どのような基準系から見ても同時ではあり得ないものもあります。ここの例で言えば，P が光を発したという事象と Q，または Q' がその光を受けたという事象は因果の関係にあるためどのような基準系から見ても同時でもその順序が逆転することもありません。

か。いるとすればどのような観測者でしょうか。

2.2.2 レーダー公式

前節での思考実験の結論を素直に認めるなら，『どのような運動状態の人が計っても，それが起こった時刻は同じ』とは言えないため，今まで暗黙に仮定されて来た『時間は宇宙に一つしかなく絶対的である』という時間に対する認識の変更に迫られます。因に，この我々の“常識”に反する変更が如何に大きいものであったかは，アインシュタインが結局，相対論の功績ではノーベル賞を貰えなかったことからも容易に察することができるでしょう。

ともあれ，この変更を認めると，ある出来事が起こったとき，『ある人の時計と物差し (基準系) では○○時刻に，XX という場所で起こったが，他の運動状態にある人の時計と物差しでは△△時刻に，□□という場所であった』と云うように，それが起こった時刻と場所に加えて，それをどのような基準系に属する観測者が見たのかの情報も常に明記する必要が生じます。

2.2.2.1 慣性観測者とミンコフスキー・ダイアグラム

ボンディ (Hermann Bondi) によると*7，慣性観測者とは，加速度計により自分が慣性系 (加速度計の目盛が常に 0 の系) にいるかどうかを常にチェックしつつ，レーダー装置を用いて自分の周囲で起こる様々な出来事をサーチし，それが起こった時間と場所とを仮想 4 次元図 (**ミンコフスキー・ダイアグラム**，以下単にダイアグラムとかミンコフスキー図と略記) に記録できる観測者を指しています。もちろん，このダイアグラムは，現実には縦軸に時間を，横軸に 3 つの空間軸の内の 1 つまたは 2 つを取るといった断片的な表記法しか取れません。

ダイアグラム中の各点は，**世界点** (worldpoint) と呼ばれ，何らかの出来事 (イベント) に対応しています。特に，運動している物体の軌道*8 はこのダイアグラム中では**世界線** (worldline) と呼ばれる一つの曲線として描かれます。

明らかに，観測者が描くダイアグラムで，時間軸は，その観測者自身の世界線に一致します。それは，その観測者から見ると自身は動いていないため時間経過しか記録しないことから明らかでしょう。

---

*7 この章のこの節以降，特にボンディの K-因子を用いた説明は，参考文献 [2] にその多くを依存しています。

*8 この軌道は，例えば，物体が時々刻々にレーダー光を反射するといった出来事の連なりと考えることができます。

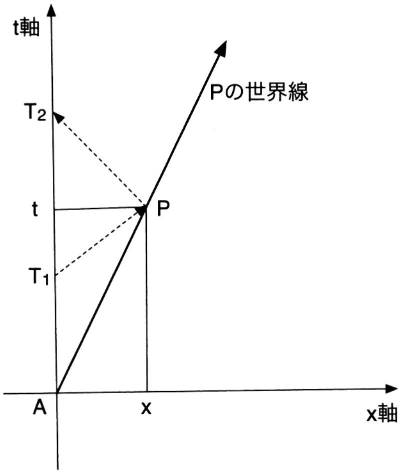


図 2.4 レーダー公式とボンディの K-因子

2.2.2.2 K-因子

図 2.4 は，ある慣性観測者 A が，x 軸の正方向に一定の速さ v で運動している物体 P を観測してその軌跡をミンコフスキー図に描いたものです。これを基に有用な式を導くことにしましょう。

今，観測者 A が時刻 t に，距離 x 隔たった位置に物体 P を観測したとします。このとき，A は t より前の時刻 T_1 にレーダーパルスを物体 P に向け発射し，その反射光を t より後の時刻 T_2 に受けなければなりません。今，光速不変の原理に従ってレーダーパルスの速さ（光速）c は行きと戻りで同じであるとすると，t と x は T_1 と T_2 により，各々

$$t = \frac{T_1 + T_2}{2} \tag{2.24}$$

$$x = c\frac{T_2 - T_1}{2} \tag{2.25}$$

と書かれるでしょう。従って，P が初め A の位置にいたとすると[*9]，A から見た P

*9 この設定は記述を簡単にする目的のためだけです。

の速さ v は,

$$v = \frac{x}{t} = \frac{T_2 - T_1}{T_1 + T_2}\, c$$

と計算されます。 更に, この式を T_2 について解くと

$$T_2 = \frac{c+v}{c-v}\, T_1 \equiv K^2\, T_1 \tag{2.26}$$

という公式が導かれます。ここで, この最右辺の K は, 次のように定義した**ボンディの K-因子**と呼ばれる後の議論で大変に重要な役割を演じる係数です。

$$K = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \tag{2.27}$$

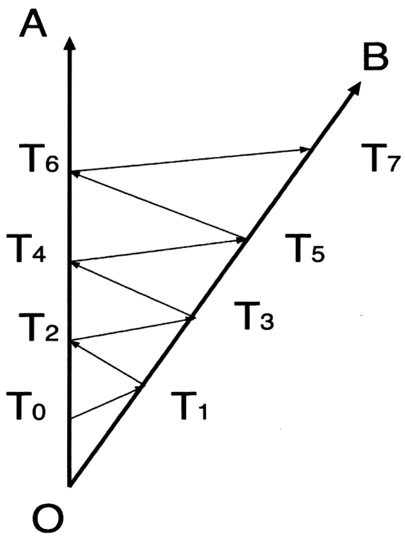


図 2.5　A が描いた 2 人の慣性観測者 A,B による光のやりとりを表すダイアグラム。B が描いても同じ図。ただし, この場合, A, B と同時に, $T_0, T_2, \cdots, T_6$ と $T_1, T_3, \cdots, T_7$ も入れ替える。

2.2.3 時計のパラドックス

すべての慣性系が等価であること（慣性系の同等性）は特殊相対論の指導原理の一つですが，ここでこの事実を積極的に用いて，節 §2.2.1.2 で述べた思考実験の結果を定量的に表してみましょう。

互いに一定の速さ v で[*10]，同一直線上を運動している慣性観測者 A と B を考えます。 初め A と B は同じ場所にいたとして[*11]，互いに相手の運動する方向を $x(x')$ 方向と定めると，A と B とがそれぞれ自分で作るダイアグラム中に描く相手の世界線は，慣性系の同等性により全く同じものとなるでしょう[*12]。例えば，図 2.5 は，A の立場で描いたものですが，B の立場で描いたものは，この図において単に A と B とを入れ換えたものと同じになります。もちろん，このとき，横軸（空間軸）は，B が定めた x' 軸になります 。

図 2.5 の A と B とを結ぶ矢は，A と B による光のやりとりの様子を示しています。つまり，**A の時計**で時刻 T_0 に A が送り出した光は，**B の時計で**時刻 T_1 に，B に受け取られると同時に A に戻され，A の時計で時刻 T_2 に受け取られると同時に再び B に向け送り出され,,, という光のピンポンの様子を示したものです。

以下は，この状況に公式 (2.26) を当てはめた結果です[*13]。

(1) 観測者 A が“物体”B を見た場合

$$T_2 = K^2 T_0, \quad T_4 = K^2 T_2, \quad T_6 = K^2 T_4, \cdots$$

(2) 観測者 B が“物体”A を見た場合

---

*10 互いに相手を見てその速さを計ると v であるという意味。以後，相対速度の大きさが v という様に表現します。

*11 以後，この表現は，A と B とが出会った瞬間の位置を，それぞれ自分が定めた座標系の原点 O と O' とし，この瞬間から各々の時計と物差しで時刻と位置とを計り始めたことを意味することとします。

*12 もちろん，全く等しくなるのは，A と B とが静止時に比較したときに，A,B 各々が同じリズムで時を刻む時計と，同じ間隔で刻まれた目盛を持つ物差しを座標軸として選んでいる場合ですが，以後，特に断らない限り，慣性系を比較して考える場合には，各系の時計と物差しはこのように設定されているとします。

*13 (2) の場合，一見すると，A と B とは互いに反対方向に運動しているため，式 (2.27) において $v \to -v$ とすべきであるように思えますが，これは A の立場に立って見た場合の結論で，B から見れば，まったく同じ式となります。このことは，空間に特別な方向があるわけではないため，B が A のとは真逆の向きに自分の x' 軸の向きを定めれば，この公式に至る手続きはすべて A のときと同じであることより明らかでしょう。

$$T_3 = K^2 T_1, \quad T_5 = K^2 T_3, \quad T_7 = K^2 T_5, \cdots$$

上の (1)，(2) に於て，光が A,B 間を往復する間に K^2 の因子が付加されることに注目しましょう。この事実に，光が A から B に向かうときと，B から A に向かうときとで状況に何らの違いはないことを考慮に入れると，

$$T_1 = KT_0, \quad T_2 = KT_1, \quad T_3 = KT_2, \cdots$$

つまり，

$$T_n = K^n T_0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{2.28}$$

が結論できます。

今，観測者 A が T_{n-1} に発したレーダーパルスを観測者 B が自らの時計で T_n の時刻に受けると同時に，そのまま相手に送り返し，そのパルスを A は T_{n+1} に再び観測したとします。このとき，B が自らの時計で T_n にパルスをキャッチしたという出来事（イベント）は，A から見るといつ，どこで起こった出来事でしょうか。もちろん，A は，レーダー公式により，時刻

$$t_n \equiv \frac{T_{n-1} + T_{n+1}}{2} \tag{2.29}$$

に，場所

$$x_n \equiv c\,\frac{T_{n+1} - T_{n-1}}{2} \tag{2.30}$$

で起こったと結論するでしょう。

こうして，パルスが B に到達した時刻について，B の時計の時刻 T_n と A の時計の時刻 t_n の2つの時刻が存在することになります。一体これらのどちらが正しいのでしょうか。それともこれらは等しいのでしょうか。次に，この疑問について考えましょう。

先ず，式 (2.28) から

$$T_n = K^n T_0, \; T_{n-1} = K^{n-1} T_0, \; T_{n+1} = K^{n+1} T_0 \tag{2.31}$$

を求めます。これらから K と T_0 とを消去すると直ちに

$$T_n = \sqrt{T_{n-1}\, T_{n+1}} \tag{2.32}$$

が導かれます。この T_n と (2.29) の t_n とは，相加平均 $\geqq$ 相乗平均の関係により直ちに

$$t_n > T_n \tag{2.33}$$

であることが分かります。もちろん，$T_{n-1} < T_{n+1}$ であるため，相加平均と相乗平均の間の等号 (=) は，成り立ちません。

この結果は，A が発したパルスを B が受け取ったという一つの出来事を，A は，自分の時計で例えば 10 時 10 分に観測したが，B の時計では 10 時 00 分であったということを意味しています。更に，このことは，(2.33) が，任意の n に対して成り立つことに注意すると，任意の時刻についても言えるため，結局，次の結論に達します。

『A の時計が時を刻むより B の時計の方がゆっくりである。』

ところで，上の手続きでは，A が時刻 T_{n-1} にパルスを発して，B がそのパルスを T_n に受けたとしましたが，図 2.5 からも分かるように，n を $1, 3, 5, 7, \cdots$ の奇数にすれば，その通りですが，$2, 4, 6, 8, \cdots$ と偶数に選べば A,B の立場を入れ替えたものとなります。つまり，この場合は，次の結論に成ります。

『B の時計が時を刻むより A の時計の方がゆっくりである。』

これら両者の結論は，一見矛盾しているように思えます。それ故，相対論初期にはパラドックスともみなされていたようです。しかし，おかしいと感じるのは，絶対時間（宇宙に一つしかない時間）を想定しているためで，これは

『時間は本来，運動状態が違えば異なった流れ方をするもので，相対的関係において動いている方の観測者の時間がゆっくりと進む』

と解釈すれば矛盾はありません。これについて，少し説明を補足しておきましょう。

時間を 1 対 1 の時計の読みで比較できるときは，相対速度が 0 の場合か，相手が加速度運動をしている場合で，前者の場合はその間に時間の進み方の相違を見いだすことは不可能です。また，後者の場合，両系は対等とは言えないため時間の遅れは一方的と成ります。

これに対して，相対速度が 0 以外の一定の慣性系同士の場合，両系は，基準系としては対等ですが，時間測定での対応関係は，静止系 2 に対して運動系 1 で対等とは言えなくなります。具体的に言えば，上述の A から見た B の場合，“静止している”A の 2 カ所の測定結果 T_{n-1} と T_{n+1} に対して，“動いている”B では，一つの測定結果 T_n が対応しています。これにより，“動いている”方の系と“静止している”方の系

とが選別されることになり，『動いている方の系の時間が遅れて進む』と言うことでパラドックスは存在しないことになります。

更に言えば，動いているか静止しているかは，慣性系のみを考えている限りでは，完全に相対的です。すべての慣性系はその系にいる観測者にとっては静止しています。そのとき，その他の系は，この系に対する相対速度が0か否かで静止しているか運動しているかが判定されます。この事実に，すべての系は，他の系の時間の流れとはまったく無関係な，その系独自に流れる時間を有しているという事実とを加味して考えれば，ここで記述した事柄のより一層の理解に繋がるでしょう。

次に，時間の遅れの程度を具体的に計算できる公式を求めましょう。

これは，t_n の式 (2.29) に，式 (2.28) を用いると直ちに

$$t_n = \frac{T_{n-1} + T_{n+1}}{2} = \frac{K^{n-1} + K^{n+1}}{2} T_0$$
$$= \frac{K^{n-1} + K^{n+1}}{2} \frac{T_n}{K^n}$$

が得られるため，これに，(2.27) より得られる関係 $\frac{K^{-1}+K}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ を用いることによって導かれます。

$$T_n = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, t_n \qquad (2.34)$$

2.2.4　ミンコフスキー空間

ミンコフスキー図によって記述される仮想4次元空間は，ミンコフスキー空間とか (3+1) 次元空間とか呼ばれています。この節では，この空間における“距離”の概念について考えましょう。

2.2.4.1　距離の定義

節 §2.2.3 で設定したのと同じ慣性観測者 A,B を考えましょう。これら2人の観測者が，ある物体Pの上で起こった出来事 (レーダーパルスの反射等) を A，B それぞれの立場で観測し，その結果からどのようなことが結論できるかを考えて見ましょう。

次のような設定で考えます。この様子を A が描いたものが図 2.6 です。

(a) A が時刻 T_1 に，x 軸上の正方向にいる B と更にその前方の物体 P に向けてレーダーパルスを発射。

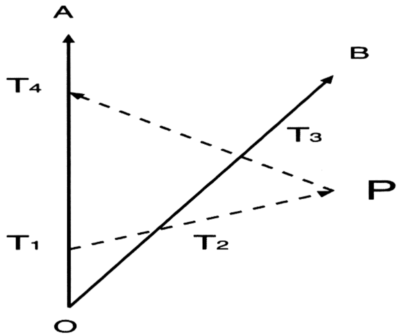


図 2.6 "距離"の不変性

(b) B は時刻 T_2 にそれを受信。その後，パルスは物体 P に当たって反射。

(c) P からの反射パルスを，B は時刻 T_3 に観測。

(d) A はそのパルスを，時刻 T_4 に受信。

図 2.6 より，観測者 A は $t_A = \frac{T_1+T_4}{2}$ の時刻に $x_A = \frac{c(T_4-T_1)}{2}$ の位置に，また観測者 B は $t_B = \frac{T_2+T_3}{2}$ の時刻に $x_B = \frac{c(T_3-T_2)}{2}$ の位置に物体 P を観測することが分かります。

このとき，(2.28) により，T_1 と T_2 ，T_3 と T_4 とは K-因子を用いて

$$T_2 = K\,T_1$$
$$T_4 = K\,T_3$$

と関係づけられます。従って，上記 6 個の式を用いて 5 つの量 T_1, T_2, T_3, T_4 および K を消去すると，次の一つの関係式へ導かれます。

$$c^2t_A^2 - x_A^2 = c^2t_B^2 - x_B^2 \tag{2.35}$$

この式の左辺は観測者 A の観測量のみで，右辺は観測者 B の観測量のみからなることに注意してください。すると，この同じ出来事（イベント）を B の他に，同様な条件で異なる相対速度を持った別の慣性観測者 C や D を想定して，彼らの観測値を用いて上記に相当する量 $c^2t_C^2 - x_C^2$, $c^2t_D^2 - x_D^2, \cdots$ を作ってもこれらの量はすべて等しいことが容易に推察できるでしょう。 このことから次の量

$$c^2t^2 - x^2$$

一般に，

$$s^2 \equiv c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{2.36}$$

は全ての慣性観測者にとって同じ，いわゆる **“不変量”** であると結論されます。

(2.36) は，3 次元ユークリッド幾何学に於いて，原点 $O(0,0,0)$ と点 (x,y,z) との間の距離の 2 乗がピタゴラスの定理により $x^2+y^2+z^2$ となることと比較して見ると，ミンコフスキー図によって表現される仮想的な 4 次元空間の原点 $O(0,0,0,0)$ と点 $P(ct,x,y,z)$ との間の『距離』の 2 乗に相当する量と言えます。一般に，座標が (ct_1,x_1,y_1,z_1) の点と (ct_2,x_2,y_2,z_2) の点の間の距離 s_{12} の 2 乗が，次式で与えられる空間は**ミンコフスキー空間**と呼ばれています。

$$s_{12}^2 \equiv c^2(t_1-t_2)^2 - (x_1-x_2)^2 - (y_1-y_2)^2 - (z_1-z_2)^2 \tag{2.37}$$

そして，(2.36) やこの式で定義される s や s_{12} は，一般に，インターバルとか**世界間隔** (world interval) とか呼ばれていますが，本書では 4 次元距離，または誤解を招く怖れがない場合には，単に距離と書くことにします。(2.36) や (2.37) からも分かる様に，ミンコフスキー空間に於ける距離の 2 乗は，我々が良く知るユークリッド空間におけるのと違って，正にも負にも，また 0 にも成り得ます。どのような場合にそうなるかについては，以下に，具体的に見ることにしましょう。

2.2.4.2　時間的な距離

同じ慣性基準系に属する二人の観測者 A と B がキャッチボールをしているとします*14。A が (x_A,y_A,z_A) の位置から時刻 t_A にボールを B に向かって投げ，そのボールを B が (x_B,y_B,z_B) の位置で時刻 t_B に受け取ったとします。この 2 つの出来事を A, B または A, B と同じ慣性基準系にいる観測者が観測した場合には，その間の 4 次元距離の 2 乗

$$s_{AB}^2 \equiv c^2(t_A-t_B)^2 - (x_A-x_B)^2 - (y_A-y_B)^2 - (z_A-z_B)^2$$

は，ボールのスピードを v（一定）とすると，

$$(x_A-x_B)^2 + (y_A-y_B)^2 + (z_A-z_B)^2 = v^2(t_A-t_B)^2$$

が成り立つため，

$$s_{AB}^2 = (c^2-v^2)(t_A-t_B)^2 \tag{2.38}$$

*14 つまり，A と B は，相対速度 0 で同じ時間と座標系を共有する慣性観測者 です。

となります。これから，光の速さ c はボールの速さ v と比較して常に大きいため，

$$s_{AB}^2 > 0$$

と結論されることが分かります。この結論は，4次元距離の不変性のため，どのような慣性系の観測者から見ても変わりません。従って，このような4次元距離の2乗が正となる2つの出来事は，どのような系から見ても正であり，**時間的 (time-like)** に隔たっていると呼ばれています。

問 2.2.4.1.1　一般に，**時間的に隔たった出来事は同じ場所で起こって見える基準系**，つまり，その基準系の観測者はその出来事に対して時間経過しか記録しないような基準系が存在します。どのような基準系か上の例を用いて考えて見て下さい。

2.2.4.3　空間的な距離

同じ慣性基準系にいる観測者 A と B が，この基準系の時計で同時 $(t_A = t_B)$ に，別々の場所 (各々 $(x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B)$ とする) で，例えばライトを点灯したとします。この2つの出来事は，A,B と同じ慣性基準系内の観測者であれば誰が見ても同時であるため，この間の4次元距離は

$$s_{AB}^2 = -(x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2$$

となり，明らかに負であることが分かります。一般に，4次元距離の2乗が負である(あるいは，虚数の距離を持つ)2つの出来事間の距離は**空間的 (space-like)** と呼ばれています。

上記の例からも分かる様に，**空間的に隔たった2つの出来事は，それらが同時に起こって見える基準系がいつでも存在します**。そして，この場合にはまた，一方の出来事が他方より早く起こって見える基準系や，反対に他方より遅く起こって見える基準系も存在することが分かります[*15]。

問 2.2.4.1.2　前節 § 2.2.1.2 で挙げた例で，電車の中央で発した光が先端と後端に達したという2つの出来事が空間的に隔たった出来事であることを説明しなさい。

[*15] このことは，直ぐ後の光円錐の節の図やローレンツ変換の章を参照すればより明確になるでしょう。

2.2.4.4 光で結ばれた出来事

同じ慣性系にいる観測者 A から B への光のやりとりについて考えましょう。今，A が時刻 t_A に，場所 (x_A, y_A, z_A) から B へ向けて光を送り，B は場所 (x_B, y_B, z_B) で時刻 t_B にそれを受光したとします。この 2 つの出来事は，光で結ばれているため明らかに

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = c^2(t_A - t_B)^2$$

が成り立ちます。従って，この出来事間の 4 次元距離は 0 となることが分かります。このように 4 次元距離が 0 の出来事間の距離は**光的 (light-like)** または，**ヌル (null) 的**と呼ばれています。

2.2.5 ライトコーン

前節までの議論により，ミンコフスキー空間に於いて，ある出来事 O を基準に取ると，その他の全ての出来事は，O に対して時間的，空間的，光的の 3 通りの何れかに分類されること，そして，その理由が出来事間の距離の 2 乗

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

がユークリッド空間の場合と異なり正定値 (常に正) でないことに由来していることが理解されたことでしょう。この節では，これらを踏まえてミンコフスキー図中での関係として見ることにしましょう。

図 2.7 は，ある慣性観測者（A とします）が O で起こった出来事を基準にして描いたミンコフスキー図です。描かれた上下の円錐は，その上の点がすべて，O と光的な関係にあることから**ライトコーン（光円錐）**と呼ばれています。

(1) **O に対して時間的な関係にある出来事**

これらの出来事は，O(0,0,0,0) と $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$ の関係にあり，従って時間軸を囲む上下のライトコーンの内側にあるすべての点に対応した出来事です。図には P_1, P_2 をその代表点として描いています。この内，P_1 の属する上ライトコーン内の領域は，O の後に起こる出来事が集まった領域です。また，P_2 を含む下ライトコーン内の領域は O に対して過去の出来事が集まった領域です。図は観測者 A が描いたものですが，P_1，P_2 と O との時間的前後関係はどのような基準系の観測者から見ても逆転することはなく，この意味で P_1 の側のすべての点は O に対して“絶対的に”未来に，P_2 がある側は“絶対的に”過去に起こった出来事の集まりと言えます。

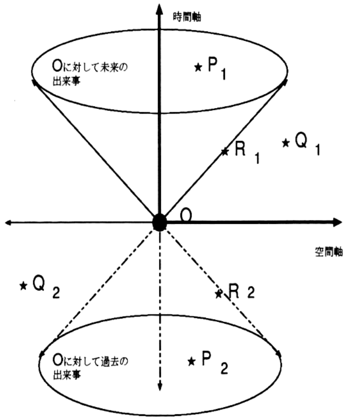


図 2.7　ライトコーン

(2) **O に対して空間的な関係にある出来事**

これらは，O と $c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 < 0$ の関係にある，つまり上下のライトコーンの外側にあるすべての点に対応した出来事です。図中の Q_1, Q_2 はその代表点です。観測者 A から見ると，Q_1 は O に対して未来の出来事で，Q_2 は過去の出来事です。また，A が描いた空間軸上の出来事もこの領域にあり，これらは O と同時刻に起こった出来事の集まりです。

(3) **O に対して光的 (ヌル的) な関係にある出来事**

これらは，O と $c^2t''^2 - x''^2 - y''^2 - z''^2 = 0$ の関係にある，つまり上下のライトコーン上で起こったすべての出来事で，図中の R_1, R_2 はその代表点です。

上記 3 種類の出来事と基準系との関わりや，『絶対的未来』とか『絶対的過去』といった概念は，後のローレンツ変換を扱った節 §2.2.8 以降でより明確になるでしょう。それまでしばらくは，準備も兼ねてミンコフスキー空間におけるベクトルやテンソルといった概念について，馴染みのある 3 次元ユークリッド空間におけるそれらとの対比で見て行くことにしましょう。

2.2.6　座標系の回転

2.2.6.1　4元位置ベクトル

普通の3次元空間（3次元ユークリッド空間）においては，$\vec{r} \equiv (x, y, z)$ を点 (x, y, z) の位置ベクトルと呼びました。これに対応して，$x^i \equiv (ct,\ x,\ y,\ z)$ をミンコフスキー空間における位置ベクトルと呼ぶことは自然でしょう。ここで，x^i は $\vec{r}$ のようなシンボルと同時に，4つの成分 ct, x, y, z の内の何れかを表しているとします。そして，そのことをより明確にするために，次のように置きましょう 。

$$(ct, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{2.39}$$

つまり，添字 i が0のときは ct を，1のときは x を，2のときは y を，3のときは z を表すものとします。

3次元の場合と同様に，位置ベクトルはベクトルのプロトタイプです。従って，その他のベクトルは，この x^i を“手本”に考えれば良いということが分かります[*16]。その際，規準となるのが，x^i の変換性です。次にこれについて見て行くことにしましょう。

2.2.6.2　3次元回転

3次元ユークリッド空間における座標系の回転は，ベクトルの長さ，従って $\vec{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2$ を不変にする斉次一次変換として定義されます。これは，数学的には $\vec{r}$ を列行列

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

として書くと

$$R^T\ R = R\ R^T = I \tag{2.41}$$

を満たす3行3列の行列 R によって

$$\vec{r'} = R\vec{r} \tag{2.42}$$

---

*16 現代の微分幾何学的なアプローチでは，ベクトルをこのような背後に座標系を仮定した定義や表記法は取らず，座標系とは独立した存在としてのベクトルの定義と表記法が取られますが，ここでの“成分表記法”は少々古いですが，分かり易くて初心者向きであり，また具体的な計算においては便利なため本書ではこちらの表記法を用いることにします。尚，微分幾何学的アプローチに関心のある物理系の読者は，取り敢えず参考文献 [3] の『数学的準備』から始めるとよいでしょう。

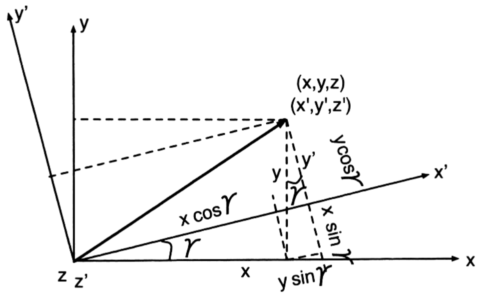


図 2.8　z 軸周りの座標系の γ 回転 $R_z(\gamma)$ により，元の座標系で (x, y, z) と表されていた点は新しい座標系では (x', y', z') と表され，両者の関係は図に補助線（破線）を書き入れることによって容易に求めることができます。

と表されます[*17]。この行列 R は，一般に，x, y, z の各軸のまわりの回転を表す行列 R_x，R_y，R_z の積として表すことができます。ここで，R_x，R_y，R_z の各々は，簡単な幾何学的な手順により求めることができます。例えば，$R_z(\gamma)$ は，図 2.8 を参考にすると

$$x' = x\cos\gamma + y\sin\gamma \tag{2.43}$$

$$y' = y\cos\gamma - x\sin\gamma \tag{2.44}$$

$$z' = z \tag{2.45}$$

となることが容易に分かるでしょう。後は，これを行列形

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

[*17] 条件 (2.41) は，ベクトルの長さの不変性により $\vec{r'}^T\vec{r'} = \vec{r}^T R^T R\vec{r} = \vec{r}^T\vec{r}$ が成り立つことから求められます。ここで，R^T は R の行と列を入れ替えた行列，つまり R の転置行列で，条件 (2.41) は，これが元の R の逆行列 R^{-1} に等しいことを示しています。このような転置が元の逆に等しい行列は**直交行列**と呼ばれています。直交行列が表す変換には，その行列式 $\det(R)$ が 1 のプロパーと -1 のインプロパーの両方の変換が含まれます。いわゆる普通の 3 次元回転は，プロパーな方に属します。対して，右手座標系から左手座標系への変換を伴う回転はインプロパー変換に属します。

に書き直すだけです。その他の R_x, R_y については，これを元に座標軸を適当に入れ替えるだけで容易に求めることができるでしょう[*18]。以下に結果をまとめておきましょう。ここで，α, β, γ はそれぞれ x, y, z 軸の周りの回転角です。

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}, \quad R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

2.2.6.3　**4次元回転**

前節の3次元ユークリッド空間における回転の概念を拡張して，背景の空間がミンコフスキー空間である場合の『回転』について考えましょう。

今，4次元位置ベクトル x^i の長さの2乗は，原点と点 (ct, x, y, z) までの“距離”の2乗に等しいことに注意すると，この『回転』は，3次元の場合の自然な拡張として，4次元距離の2乗 $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ を不変にする斉次一次変換として定義されることが分かります。従って，この変換は，x^i を列行列により

$$x^i = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

と表現して，更に次のような行列

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

を導入すると

$$A^t\ \eta\ A = \eta \tag{2.49}$$

を満たす行列 A として表されることが分かります。つまり，求める変換は，すべてこの式を満たす正則行列として表現されることが分かります[*19]。

次の点に注意すれば，(2.49) を満たす変換行列の全体像が想像できるでしょう。

[*18] 具体的には，$R_x(\alpha)$ は，$\gamma \to \alpha$ として座標軸を $x(x') \to y(y')$, $y(y') \to z(z')$ へ，また $R_y(\beta)$ では，$\gamma \to \beta$ として，座標軸を $x(x') \to z(z')$, $y(y') \to x(x')$ へ置き換えることによって直ちに得ることができるでしょう。

[*19] **正則行列**とは，その逆が存在する行列全般を指します。従って，その行列式は $\neq 0$ です。条件式

(1) **時間軸を変えない"回転"は，本質的に3次元回転と同じ。**

この場合の A は，

$$A_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

の形で表現されます。このとき，(2.49) より，$R^t R = I$ が得られ，これにより R は3次元回転を表す行列と同じであることが分かります。

(2) **時間軸と任意の空間的方向を向いた軸との間の"回転"は，時間軸と x 軸の間の"回転"（これを x 方向ブースト変換と呼ぶ）と (1) の A_R との組み合わせで表される。**

x 方向ブースト変換は，y, z を不変にするため

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

の形で表されるでしょう。このとき，B は，(2.49) より

$$B^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

を満たす2行2列の行列である必要があります。もちろん，I は2行2列の単位行列で，0 は2行2列の 0 行列です。行列 B の具体的な形は次節で求めるとして，これを用いると命題 (2) の証明は，例えば y 方向ブースト変換が，次の手順により得られることに注意すれば十分でしょう。

(a) 先ず，空間軸を z 軸のまわりに $\frac{\pi}{2}$ 回転して，x 軸を元の y 軸の向きに一致させます。
(b) 続けて，新たな x 軸に沿って x 方向ブースト変換を行ないます。
(c) 最後に，逆回転（z 軸のまわりの $-\frac{\pi}{2}$ 回転）して，x 軸を最初の x 軸に平行に成るように戻します。

この手順を行列で表すと次のようになります。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_z^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_z^+ \end{pmatrix} \tag{2.52}$$

(2.49) は，4次元距離の不変性 $x'^i x'_i = x^i x_i$ より得られます。導出については，後の (2.59) を参考にして，3次元の場合と同様にすれば良いでしょう。この条件式から，ここで扱う4次元回転を表す行列 A も前節の3次元回転を表す行列と同様，その行列式の値は ± 1 の何れかであることが分かります。

ここで，z 軸周りの $\pm\frac{\pi}{2}$ 回転を表す行列 $R_z^{\pm}$ は，(2.46) より得られます。

$$R_z^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 \\ \mp 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問 2.2.4.1.3　**y 方向ブースト変換**

後述の x 方向ブースト変換の式 (2.57) を (2.52) に用いて，y 方向ブースト変換式が，次の行列で表されることを示しなさい。

$$\begin{pmatrix} \cosh\theta & 0 & -\sinh\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh\theta & 0 & \cosh\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.53}$$

一般論は，これ位にして次に，x 方向ブースト変換式の具体的な求め方について説明することにしましょう。

2.2.6.4　x 方向ブースト変換

基本的には，行列 B に 4 個の未知の量を仮定して，条件 (2.51) を満たすようにこれらを決めれば良いわけですが，代わりにここでは以下の手順に従って進めることにします。

先ず，4 次元距離の不変性は，回転後の量をプライム (') を付けて表すと今の場合は $y' = y$，$z' = z$ であるため

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$$

と表されることに注意しましょう。

次に，実数の ct の代わりに複素量 $x_4 \equiv ict$ を導入して，この関係を

$$x_4^2 + x^2 = x_4'^2 + x'^2 \tag{2.54}$$

と見掛け上，完全に 2 次元ユークリッド空間の場合に似せて書きます。このとき，B に対応する行列は，形式上では普通の 2 次元回転行列に一致するため，(2.46) の R_z と比較して次のように書かれることが分かります。

$$\begin{pmatrix} x_4' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

ここで，角 α は実数ではありえないことは明らかですが，どのような複素量であればよいのでしょうか。これを知るために x_4 を元の ct に戻してみます。

$$ct' = ct\cos\alpha + ix\sin\alpha$$
$$x' = ict\sin\alpha + x\cos\alpha$$

これらの式の左辺は実数であるため，右辺もそうである必要がありますが，α が一般の複素数であれば $\cos\alpha$，$\sin\alpha$ は共に複素数となるため，実数には成り得ません。しかし，α が純虚数，即ち

$$\alpha = i\theta, \qquad \text{ただし，}\theta\text{ は実数}$$

であれば，$\cos\alpha = \cosh\theta$ は実数で，$\sin\alpha = i\sinh\theta$ は純虚数と成るため，右辺も実数と成ります[20]。このようにして次の結果に到達できました 。

$$B = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \tag{2.56}$$

因に，逆変換は，B の逆行列 B^{-1} によって表されますが，それは簡単には $\theta \to -\theta$ とすれば直ちに得られます。

最後に，x 方向ブースト変換を完全な形で書いてこの節のまとめとしましょう。

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta & 0 & 0 \\ -\sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.57}$$

問 2.2.4.1.4　任意の方向へのブースト変換

(2.52) において，x 方向ブースト変換の式 (2.57) と，$R^{\pm}{}_z$ の代わりに $R^{+}{}_z \to R_y(\theta - \frac{\pi}{2})R_z(\phi)$，および $R^{-}{}_z \to R_z(-\phi)R_y(\frac{\pi}{2} - \theta)$ とおいて任意の $\vec{e}$ 方向へのブースト変換に対する行列が次のように成ることを示しなさい。ただし，(2.57) の θ を ψ とし，$\vec{e}$ を，3 次元極座標の 2 つの角（θ:z 軸から測った $\vec{e}$ の

---

[20] ここで，sinh と cosh（それぞれハイパーボリック サイン，ハイパーボリック コサインと読みます）は，それぞれ $\sinh\theta = \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$，$\cosh\theta = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$ と定義された**双曲線関数**です。三角関数と類似な $\tanh\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}$ や $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$ などの関係が成り立ちます。また，ここで問題の三角関数との関係は，三角関数が複素な変数 α も含めて一般に $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$，$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$ と定義されることより明らかでしょう。

向きの角度，ϕ:$\vec{e}$ の xy 面への正射影の x 軸から測った角度）で表した単位ベクトル，すなわち，$\vec{e} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ とします[*21]。

$$\begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sin\theta\cos\phi\sinh\psi & -\sin\theta\sin\phi\sinh\psi & -\cos\theta\sinh\psi \\ -\sin\theta\cos\phi\sinh\psi & 1+\sin^2\theta\cos^2\phi(\cosh\psi-1) & \sin^2\theta\sin\phi\cos\phi(\cosh\psi-1) & \sin\theta\cos\theta\cos\phi(\cosh\psi-1) \\ -\sin\theta\sin\phi\sinh\psi & \sin^2\theta\sin\phi\cos\phi(\cosh\psi-1) & 1+\sin^2\theta\sin^2\phi(\cosh\psi-1) & \sin\theta\cos\theta\sin\phi(\cosh\psi-1) \\ -\cos\theta\sinh\psi & \sin\theta\cos\theta\cos\phi(\cosh\psi-1) & \sin\theta\cos\theta\sin\phi(\cosh\psi-1) & 1+\cos^2\theta(\cosh\psi-1) \end{pmatrix} \tag{2.58}$$

2.2.7 反変ベクトルと共変ベクトル

4元位置ベクトル x^i を列行列とした (2.47) と，そこで定義した行列 η とを用いると，このベクトルの長さの2乗 $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ は，

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (ct\ x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.59}$$

と表すことができます。ところで，この式は，この空間におけるもう一つのベクトルの存在を暗示しています。実際，このベクトルの行列形を，

$$x_i = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \tag{2.60}$$

と定義すると，この空間の4元位置ベクトルの長さの2乗も，3次元の場合と似た形

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \sum_{i=0}^{3} x^i\ x_i \equiv x^i\ x_i \tag{2.61}$$

に書かれることが分かります。ただし，最右辺の式は，和の記号 $\sum$ を省略するために導入された“アインシュタインの和の規約”に従って書いたもので，ここでは，これは，『同じ添字が上下一対で現れたときは0から3まで和を取る』というルールになります。

[*21] この計算は，Maxima などの数式処理ソフトを用いると容易にできます。参考のために付録 B.4.1 にこの式を Maxima を用いて求める手順を示しておきます。

ところで，2つのベクトル x^i, x_i は，(2.61) が，4次元回転によって不変であるため，この変換の下に互いに逆向きに変換する量であることが分かります。このことを考慮して，慣習に従って，以後，4次元回転に際して位置ベクトル x^i と同じ変換をする4つの量の組を**反変ベクトル**と呼び，これと逆向きに変換する4つの量の組を**共変ベクトル**と呼ぶことにしましょう。

2.2.7.1 テンソル

すべての自然法則をベクトルだけで記述することは不可能です。力学の例で言えば，剛体の運動は，一般には慣性テンソルを用いて表現されます。また，電磁気学では電界（電場）と磁界（磁場）の6個の量をセットで扱う必要が生じます。

このような必要性のために，“何個かのベクトルの積”と同じ変換をする量としてテンソルと言う量が定義されています。テンソルは，その変換性から分類され，それに応じた名前を持っています。例えば，3次元で2つのベクトルの積と同じ変換をする9個の量の組みは2階のテンソル，3つのベクトルの積と同じ変換性を有する 3^3 個の量の組みは3階のテンソル，等々と呼ばれています。

ここで扱っているミンコフスキー空間の場合は，基本的に定義は3次元の場合と同じですが，ベクトルが2種類あるため事情はもっと複雑です。例えば，2階のテンソルと言っても，一般に，反変テンソル，2種類の混合テンソル，共変テンソルの4種類あります。

テンソルについての定性的な説明はこれ位にして，様々な準備が整った後にもう一度，取り上げてより具体的に説明することにしましょう[*22]。

2.2.8 ローレンツ変換

この節では，同じ出来事を2人，あるいはそれ以上の別の慣性観測者が記述したときのそれぞれの時刻と座標の間の関係を表す式，いわゆるローレンツ変換式を求めることにしましょう。この式は，言わば日本語で記述した出来事を，これに通すと英語やドイツ語やフランス語などの言葉に翻訳してくれる翻訳機のようなものと考えれば良いでしょう。

ところで，2011年9月に，質量を持ったニュートリノが光速を越える速さで伝播するという実験結果が発表されて一時『相対論は間違っているのではないか』と巷を賑わせたこともありましたが，ローレンツ変換は，その名の示す通り元々は相対論以

[*22] テンソルについてのより具体的で，より一般的な定義は後の節 §2.6.2 で扱います。

前にローレンツによって実験結果を説明するために考えられた実験式で，この節では，その変換式が相対論の２つの基本原理に基づけば理論的に導き出されることを見るでしょう。従って，その意味で，ローレンツ変換から予測される数々の事実の正しさは，特殊相対論の２つの基本原理の正しさを再確認するものとも言えるでしょう。

2.2.8.1 **慣性系間の変換式**

相対速度の大きさが v の２人の慣性観測者 A,B がいます。いつものように，彼らが出会ったところを起点として，時間と位置を測定し始めたとします。

今，彼らがある出来事 P を観測して，A は時刻 t に，場所 (x, y, z) に，B は時刻 t' に，場所 (x', y', z') にそれを観測したとします。このとき，４次元距離の不変性から次の等式が成り立つことを §2.2.4.1 で学びました。

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \tag{2.62}$$

目的の関係式を得るために，更に，これに加えて，『全ての慣性系は“同等”であるため，求める関係式の逆の関係も同様の式で表されなければならない』，従って，求める関係式は**一次 (線形) 式**で表されなければならないという事実に注目します。

線形代数学のテキスト等で，一次変換式は，一般には行列形で

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

と書かれることは良く知っていることでしょう。これを今の状況に当てはめると，“出会った瞬間を起点にする”という最初の前提により右辺最後の非斉次項（0 次の項）は 0 行列となります。

以上の要請を満たす変換は，正しく節 §2.2.6 で見て来た，ミンコフスキー空間における回転です。そこで学んだように，一般の４次元回転は，普通の３次元の回転と一つのブースト変換の組み合わせによって表されるため，ここでは，x 方向ブースト変換 (2.57) を取り上げてこれに対応するローレンツ変換について考えることにしましょう[*23]。

[*23] ここで扱う『回転』を利用した方法の他に，目的の結果 (2.68) をもっと直接的に得る方法があります。これについては，付録 §A.1 を参照して下さい。

2.2.8.2　x 方向ブースト変換

(2.57) で表される関係にある２つの慣性系は，すべての空間軸が平行で，彼らが出会ったときの時刻は共に 0 で，一方から見ると他方は x(又は，x') 軸上を速さ v で運動しているという関係にあります。

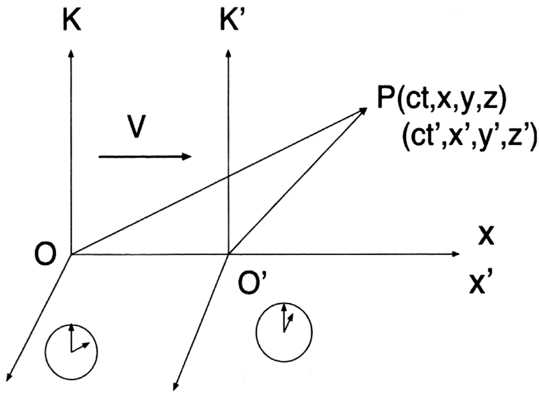


図 2.9　x 方向ブースト変換

ここですべき唯一のことは，このように設定された２つの慣性系の間の相対速度と，“回転角”として導入された θ との間の関係を求めることです。

■θ の物理的な意味　上の２つの慣性系を図 2.9 の K と K' とします。これにより，K' 系は K 系の x 軸に沿ってその正方向に速さ v で運動していることになります。

先に進む前に次の事を再確認しておきましょう。

『求めようとしている変換式は，K と K' の２人の観測者 A と B とが，任意の出来事を観測して，A は時刻 t に (x,y,z) の位置に，B は時刻 t' に (x',y',z') の位置にそれを観測したときの，それら測定データの間の関係を与えるものである。』

今，我々の目的のために，『B が点灯した』という特別な出来事を考えましょう。そして，この出来事は，A,B 各々の時計でそれぞれ時刻 t と t' に観測されたとします。

このとき，B は自分の座標系の原点 O' に居たとすると，K 系の原点 O に居る A から見たその位置は $x = v\,t$ となります。

まとめると，この出来事は，K 系では $(ct, vt, 0, 0)$，K' 系では $(ct', 0, 0, 0)$ と記述されることに成ります。従って，このとき，(2.57) より次の関係が得られます。

$$ct' = \cosh\theta\ ct - \sinh\theta\ vt \tag{2.63}$$
$$0 = -\sinh\theta\ ct + \cosh\theta\ vt \tag{2.64}$$

そして目的の関係は，この下式より直ちに導かれます 。

$$\tanh\theta = \frac{v}{c} \tag{2.65}$$

更に，この式から，双曲線関数に関する次の関係

$$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1, \quad 1 - \tanh^2\theta = \frac{1}{\cosh^2\theta} \tag{2.66}$$

を用いると，直接必要な式が得られます*24。

$$\cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \sinh\theta = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.67}$$

以上をまとめる我々の求める関係式は次のようになります。

$$\begin{cases} t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{2.68}$$

因みに，この変換式が，**ローレンツ変換**として広く知られている式です。

問 2.2.6.4-1　(2.68) を用いて，K' 系の x' 軸に沿って置かれた長さ ℓ の棒は，A から見ると

$$\ell\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

の長さに見えることを示しなさい（この現象は，**ローレンツ収縮**として知られています）*25。

---

*24 この導出において，$\cosh\theta$ はその定義 $\cosh\theta = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$ から常に正であることに注意しましょう。
*25 解答は，節 §2.2.9.2 にあります。

問 2.2.6.4-2 原点 O' に座っている観測者 B が起こした 2 つの出来事を観測することによって，観測者 A は B の時計が

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

の割合で遅れて行くと結論することを示しなさい。

問 2.2.6.4-3 (2.58) を用いて，$\vec{e}$ 方向へ速さ v で運動している慣性系への変換式が，次式で与えられることを示しなさい。

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{c^2}\right) \\ \vec{r'} = \vec{r} + \frac{\gamma-1}{v^2}(\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{v} - \gamma\vec{v}t \end{cases} \tag{2.69}$$

ただし，$\vec{r} = (x, y, z)$，$\vec{r'} = (x', y', z')$，$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，そして $\vec{v} = v\vec{e}$ と置いていることに注意して下さい。因に，この変換の逆変換は，$\vec{v} \to -\vec{v}$ と置き，$t \leftrightarrow t'$, $\vec{r} \leftrightarrow \vec{r'}$ と置き直すことによって得ることができます。

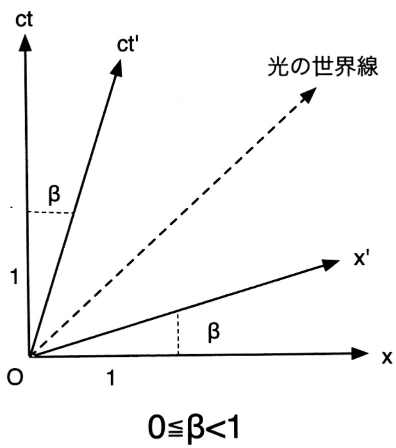


図 2.10 **x 方向ブースト変換** 速さが速く成ると x'，ct' は，それぞれライトコーンの外側と内側からライトコーンに近づきます。仮に $\beta = 1$ とすると，x', ct' が一致するため光の速さで運動する基準系は現実には存在しないことが分かります。

2.2.8.3　3種類の距離

今まで，3次元回転との類推から4次元回転と呼んで来ましたが，(2.57) からも分かるように実際の回転のイメージとは異なります*26。

図 2.10 は，x 方向ブースト変換の様子を描いたものです。この図は，K 系の観測者の立場で描いたものですが，これに K' 系の時間軸 ct' と x' 軸とを描き込んでいます。これらを表す直線は，ブースト変換式 (2.68) を参照しながら以下の手順で描くことができます。

■時間軸　K' 系の時間軸 ct' は，K' 系の座標原点 O'(0,0,0) に静止している観測者の世界線であるため，$x' = 0$ と置けば直ちに得られます：

$$x = \beta\, ct, \qquad \text{ただし，}\quad \beta = \frac{v}{c}\ (< 1)$$

図ではこの直線は，ct' と標記した有向線分で表しています。$\beta < 1$ であるため，この直線はライトコーンの内側，つまり O に対して時間的な領域にのみ存在できることになります。逆に言えば，ライトコーンの内側で O を起点に描いた任意の直線に対して，それを時間軸とする慣性系が必ず存在すると言えます。

■空間軸　K' 系の空間軸は，K' 系における時刻 0 でのすべてのイベントの集まりからなるため，$t' = 0$ とおいて得られます：

$$ct = \beta\, x$$

図ではこの直線は，x' と標記した有向線分で表しています。時間軸の場合と同様な考察により，ライトコーンの外側にあり，O を起点とする任意の直線を空間軸に持つ慣性系が必ず存在することが分かります。

2.2.8.4　ローレンツ変換と距離

図 2.10 を参考にして，時間的，空間的に隔たった距離について，ローレンツ変換との関わりで見てみましょう。時刻 $t = 0$ に座標原点 $(0, 0, 0)$ で起こった出来事 O を基準にします。

(1) **O と時間的関係にある出来事：** ライトコーンの内側にあるすべての点がこれに対応しますが，この中の任意の点 P を選ぶと，ローレンツ変換によってこれ

*26 もちろん，ユークリッド空間であれば4次元でも我々の知る回転のイメージと一致します。

とOとを結ぶ直線OPを時間軸に持つ慣性系へ移ることができます。そして，その系から見ると，この出来事はOと同じ場所で起こったことになります。

(2) **Oと空間的関係にある出来事**：ライトコーンの外側にあるすべての点がこれに対応しますが，この中でOと同時に起こった出来事をQ，Oより未来に起こった出来事をQ_1，そしてOより過去に起こった出来事をQ_2とします。
このとき，ローレンツ変換により，直線OQ_1を空間軸に持つ慣性系へ移ると，この系では，OとQ_1とが同時で，Qは，これより前に起こったことになります。また，ローレンツ変換により，直線OQ_2を空間軸に持つ慣性系へ移れば，QもQ_1もOより後に起こることになります。
以上のように，同じ2つの出来事が，同時であったり，一方が他方より遅かったり，早かったりして見える基準系が存在するのが空間的に隔たった出来事の特徴です。

2.2.8.5 速度変換則

光速度の普遍性のためにガリレイ・ニュートンの速度合成則 (2.23) は，成り立たないことを学びました。代わりにどのようなルールが成り立つかを考えてみましょう。そのためにx方向ブースト変換式 (2.68) より始めましょう。

観測者Aが運動する物体Pを時刻tに位置(x, y, z)に観測して，またその直後$t + dt$に，同じ物体を$(x + dx, y + dy, z + dz)$の位置に再び観測したとします[27]。このときのAから見たPの速度$\vec{v}$は

$$\vec{v}_p = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \equiv (v_x,\ v_y,\ v_z)$$

として得られます。また，これをBが同様に観測した場合は

$$\vec{v'}_p = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right) \equiv (v'_x,\ v'_y,\ v'_z)$$

となります。故に，$\vec{v}_p$と$\vec{v'}_p$の間の関係を知るためには，$(dt,\ dx,\ dy,\ dz)$と$(dt',\ dx',\ dy',\ dz')$の間の関係を求めればよいことが分かりますが，これは (2.68)

[27] dtやdxなどの量は，現実的には小さい量を表すΔtやΔxなどを用いる必要がありますが，応用分野では，しばしば最初から数学で云う"無限小量"を表す「微分」（dx等のdのついた量）が用いられます。このテキストでも以後，十分に小さい変数を扱う場合は，最初からこの微分を用いることにします。

より直ちに

$$dt' = \gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx) \tag{2.70}$$

$$dx' = \gamma(dx - vdt) \tag{2.71}$$

$$dy' = dy \tag{2.72}$$

$$dz' = dz \tag{2.73}$$

と求まるため，従って，求める変換則は，dt' と dx'，dy'，dz' との比を取ることに依って，次のように求められることが分かります。

$$\begin{cases} v'_x = \frac{v_x - v}{1-\frac{v}{c^2}v_x} \\ v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1-\frac{v}{c^2}v_x)} \\ v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1-\frac{v}{c^2}v_x)} \end{cases} \tag{2.74}$$

ここで，γ を

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.75}$$

と置いたこと，また，この逆の変換式は，この式で単に $v \to -v$ として，更に v_x, v_y, v_z と v'_x, v'_y, v'_z の対応する記号の位置をそれぞれ入れ替えることによって得られることに注意して下さい。

問 2.2.8.5.1　一般のブースト変換 (2.69) の場合，速度変換則は次式で表されることを示しなさい。

$$\vec{v'}_p = \frac{\vec{v}_p + \frac{\gamma-1}{v^2}(\vec{v}_p \cdot \vec{v})\vec{v} - \gamma\vec{v}}{\gamma\left(1-\frac{\vec{v}_p\cdot\vec{v}}{c^2}\right)} \tag{2.76}$$

もちろん，この逆の関係は $\vec{v} \to -\vec{v}$ と置き $\vec{v}_p \leftrightarrow \vec{v'}_p$ とすることに依って得ることができます。

2.2.8.6 **ポストニュートン近似**

速度の変換式 (2.74)，或はより一般に (2.76) から直ちに，速度合成則は単純にガリレイ・ニュートンのようにベクトル和の形には書けないことが分かりますが，このことをより明確にするために，例えば，(2.74) に於いて $\frac{v}{c} \ll 1$ の場合を考えてみま

しょう。この場合，$\vec{v} = (v, 0, 0)$ であるため $vv_x = \vec{v} \cdot \vec{v}_p$ と書かれることに注意すれば，(2.74) の3式はまとめて

$$\vec{v'}_p \cong \vec{v}_p - \vec{v} + \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_p}{c^2}\vec{v}_p, \qquad \text{或は,} \quad \vec{v}_p \cong \vec{v'}_p + \vec{v} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v'}_p}{c^2}\vec{v'}_p \tag{2.77}$$

と書かれることが分かります。この式からベクトル $\vec{v'}_p$ は，ベクトル $\vec{v}_p$ と $\vec{v}$ との和のルール（ベクトルの平行四辺形のルール）に従っていないことが理解されるでしょう。

2.2.8.7 光の速さは基準系によらない

次に，光速に近い速さで運動している基準系から見ても光の速さは c であることを確認してみましょう。このために，(2.74) の逆の変換を考えます。これは $v \to -v$ とすれば容易に得られますが，この内の x 成分のみを用います。

この式を用いると，観測者 B が，x' 軸に沿って速さ c で伝播している光を観測したとき，観測者 A から見たこの光の速さは，その式で $v'_x = c$ と置いて

$$v_x = \frac{c+v}{1+\frac{v}{c^2}c} = c \tag{2.78}$$

と計算され，やはり c となることが確かめられます。

2.2.9 慣性系の時間と空間

ここで，一般相対論へ向けての準備として，運動状態の異なる慣性系の時間と空間の相違についてまとめておくことにしましょう。

以下では，節 §2.2.8.2 で扱った2人の慣性観測者 A,B で考えることにします。

2.2.9.1 運動系の時間

(1) A が時刻 t に，$x = vt$ の位置にいる B が点灯するのを観測。
　これは K' 系の原点にいる B の時計では，

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, t \tag{2.79}$$

　の時刻と成り，A の時刻より遅れている。

(2) B が時刻 t' に，$x' = -vt'$ の位置にいる A が点灯したのを観測。

これはK系の原点にいるAの時計では，

$$-vt' = -vt\gamma \quad \text{よって} \quad t = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, t' \tag{2.80}$$

の時刻となり，Bの時刻より遅れている。

一見，これら2つの結論が相反するように思えるのは，節§2.2.3で見たように，絶対時間の信仰によるものと言えます。時間の進み方を比較する場合，どちらの立場で見るかによります。互いに相手を見ると相手は運動しています。故に結論は，『静止している自分のと比較すると運動している相手の時間がゆっくり進んでいるということで矛盾はない』となります。

2.2.9.2　運動系の空間

運動している基準系の長さがどのように見えるかを考えましょう。身近な例で言えば，プラットホームから見ると通過する新幹線の長さがどのように見えるかを考えるということです。ただし，新幹線の速さが光の速さに近い速さでないとその測定値は静止時の長さと殆ど区別できないでしょうけれども。

今，K系をAとその相棒がいるプラットホーム，K' 系をBが乗っている新幹線と考えることにしましょう。このとき，K' 系の x' 座標で，Bが予め測り出していた新幹線の両端の座標がそれぞれ x'_1, x'_2 で，それらをプラットホーム上にいるAとその相棒が同時刻 t に計り出した座標がそれぞれ x_1, x_2 であったとします（図2.11参照）。

このとき，x'_1 と x'_2 を (2.68) を用いて x, t で表すと

$$x'_1 = \gamma(x_1 - Vt), \quad x'_2 = \gamma(x_2 - Vt)$$

となります。静止している新幹線の長さ（これは新幹線の固有の長さと言えます）は $x'_2 - x'_1$ であるため

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) \tag{2.81}$$

$$x_2 - x_1 = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,(x'_2 - x'_1) \tag{2.82}$$

と結論されます。この結果は，新幹線の代わりに，K' 系の x' 軸の一目盛と考えると，動いているK' 系の長さの目盛を“静止している”K系から測ると $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ の割合でその運動方向に縮んでいることを示しています。因に，運動方向に垂直な y', z' 方向についてはKと同じであることは明らかでしょう。この現象は**ローレンツ収縮**と

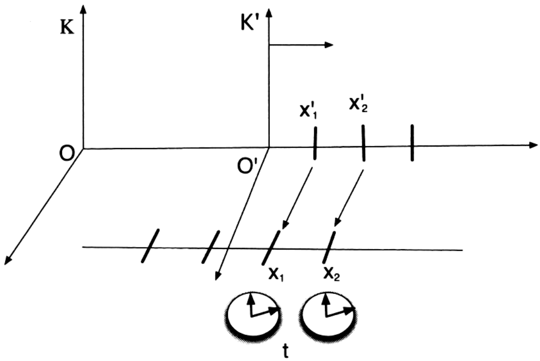


図 2.11　x_1', x_2' は K' の x' 軸上の 2 点（本文では新幹線の両端の座標）

呼ばれています。最後に，この結論は，時間の場合と同様に，慣性系の同等性から K と K' とを入れ替えても同じであることを付け加えておきます。

2.3 ドップラー効果

音のドップラー効果については，日常の経験から馴染みのある現象で，その原理も殆どの人が良く知っていると思われますが，光，特に電波のドップラー効果については，今では非常にポピュラーなのですが，余り知る人はいないように思われます[28]。

この節では，ローレンツ変換の一つの応用として，光速に近い速さ，つまり相対論的な効果が問題となる速さで運動している光源や観測者に対しても成り立つドップラー効果（**相対論的ドップラー効果**と呼ぶことにします）の公式を導出して，これを用いて膨張宇宙の実験的な検証となったハッブルの法則に言及したいと思います。

[28] 電波のドップラー効果を利用した身近な応用例としては，野球の球速測定，オービス，気象観測用のドップラーレーダーなどがあります。

2.3.1 ドップラー効果の基礎

本題に入る前に，準備として基本的な事柄について復習しておきましょう。先ず，波，特にその数学的表現法から始めましょう*29 。

■波の数学的な表現

(1) 波は一般に，時間と空間座標の周期関数によって表現されます：

$$u(t+nT,x)=u(t,x),\quad u(t,x+n\lambda)=u(t,x)$$

ここで，n は整数，T は**周期**，λ は**波長**と呼ばれています。

(2) 進行しない波（定常波）の簡単なものは次の周期関数で表されます。

$$u=u_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

(3) 伝播する波の簡単なものは次の関数で表されます。

$$u=u_0\sin(\omega t\mp kx) \tag{2.83}$$

(4) 一般の波は，上記の簡単なタイプで異なる周期や波長を持った波の重ね合わせ，つまりフーリエ級数やフーリエ積分によって表すことができます。

ここで，$\omega\equiv\frac{2\pi}{T}$ は角振動数（角周波数），$k\equiv\frac{2\pi}{\lambda}$ は波数と呼ばれている量です。(2.83) の復号 ($\mp$) のマイナス (-) は，x 軸に沿って正方向に，プラス (+) は，負の方向に伝わる波を表しています。

(2.83) のような単色波（色は振動数を意味します）の速さは，位相が同じ点の移動する向きと速さから求められます：

$$位相=\omega t\mp kx=一定$$

として，この両辺を時間 t で微分して $\frac{dx}{dt}=v$ と置くと，$v_\pm=\pm\frac{\omega}{k}$ として同一位相の点が伝播して行く速度（**位相速度**）が得られます*30 。

---

*29 現実には，節 §2.1.2.4 で扱った電磁波のようにいくつかの成分を持つ波が存在しますが，ここでは，ただ一つの成分しか持たない**スカラー波**のみを例として考えます。

*30 合成波の場合には，位相速度の他に波全体としての伝播速度を表す群速度という概念がありますが，ここでは割愛します。

■**任意の向きに伝わる波** (2.83) のマイナス符号の x 軸上を正方向に伝わる波を基にして，x, y, z 軸との成す角がそれぞれ α, β, γ である方向へ伝播する同タイプの波について考えましょう。因に，この波の伝播する向きは，普通，**方向余弦**と呼ばれるこの方向の単位ベクトル

$$\vec{e} \equiv (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma) \tag{2.84}$$

によって表されます。この $\vec{e}$ を用いると，振動点の座標 (x, y, z) は，$\vec{r} = r\vec{e}$ と表されるため，元の波の式で x を $r = \vec{e}\cdot\vec{r}$ で置き換えることによって

$$u = u_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \tag{2.85}$$

と求める波の式が容易に得られます。ただしここで，次の関係に注意する必要があります。

$$kr = k\vec{e}\cdot\vec{r} \equiv \vec{k}\cdot\vec{r}, \tag{2.86}$$

$$\vec{k} \equiv k\vec{e} = (k\cos\alpha,\ k\cos\beta,\ k\cos\gamma) \tag{2.87}$$

式中の $\vec{k} \equiv k\vec{e}$ は，波の伝播する向きの情報を持ち，2π[rad] 当たりの波の数を大きさとして持った**波数ベクトル**と呼ばれている量です。

この波の位相速度の大きさは，前と同様に

$$\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} = 一定$$

と置き，この両辺を t で微分して

$$\omega - \vec{k}\cdot\vec{v} = 0 \rightarrow \omega - k\vec{e}\cdot\vec{v} = 0 \rightarrow \omega - kv_r = 0$$

より

$$v_r = \frac{\omega}{k} \tag{2.88}$$

と求められます。特に，電波や光の場合，真空中では $v_r = c$ であるため，

$$c = \frac{\omega}{k} \tag{2.89}$$

となります[*31]。

*31 空気の屈折率は，ほぼ 1（0° C で 1 気圧の空気の屈折率は，波長 589.3nm の単色光で測定して 1.000292）であるため空気中でもこの式は成り立っていると考えてよいでしょう。

■音のドップラー効果　音のドップラー効果について復習しておきましょう。ここでの考え方は，各基準系で固有に流れる時間（固有時間）を考慮に入れれば基本的に相対論的ドップラー効果の場合にも当てはまります。

次の問からはじめましょう。

問 1　図 2.12 のように，振動数 f〔Hz〕の音源が，速さ v〔m/s〕で静止した観測者に近づいてきたとき，観測者が聞く音の振動数 f'〔Hz〕はいくらか。ただし，このときの音速は V〔m/s〕であったとする。

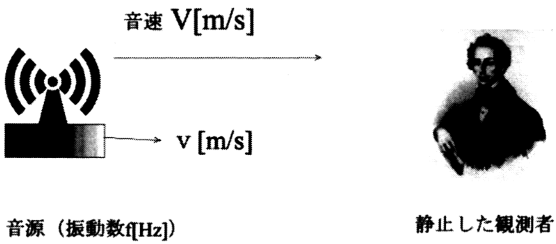


図 2.12　音のドップラー効果：音源が観測者に近づく場合

考え方と解

(1)　1 秒間に音源が発する波の数は，振動数 f に等しい f 個。

(2)　1 秒間に，音源が進む距離は v[m]，波が進む距離は V[m]。

(3)　$V - v$[m] の間に f 個の波があるので，波 1 個当たりの長さ，つまり波長 λ は

$$\lambda = \frac{V - v}{f}$$

となる。

(4)　一方，音源の出す音の波長 λ_0 は，$\lambda_0 = \frac{V}{f}$

(5)　比 $\frac{\lambda}{\lambda_0}$ を取ると，

$$\lambda = \frac{V - v}{V}\lambda_0$$

(6) 観測者が聞く音の波長は λ であるため，振動数 f'[Hz] は

$$f' = \frac{V}{\lambda} = \frac{V}{V-v}f \quad > f \tag{2.90}$$

となる。

上の結果で $v \to -v$ とすると，音源が遠ざかる場合の式になります。

$$f' = \frac{V}{\lambda} = \frac{V}{V+v}f \quad < f \tag{2.91}$$

問 2　振動数 f〔Hz〕，波長 λ〔m〕の静止した音源からの音を，速さ v〔m/s〕で遠ざかる観測者が聞いたときの音の振動数 f'〔Hz〕はいくらか。ただし，このときの音速は V〔m/s〕であったとする。

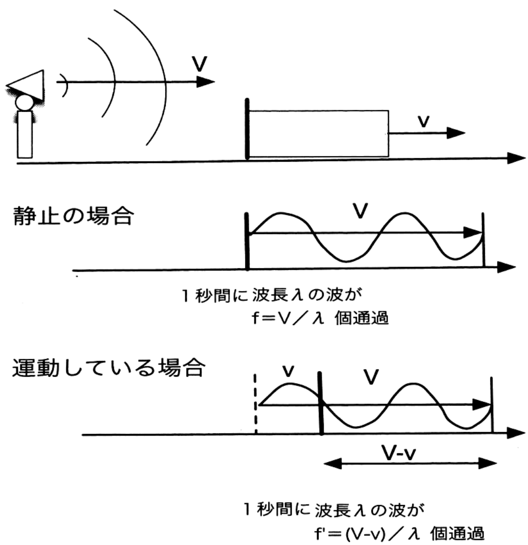


図 2.13　**観測者が運動している場合のドップラー効果**　観測者が静止している場合（上）と速さ v〔m/s〕で運動している場合（下）の振動数

図 2.13 から分かるように，1 秒間に観測者の傍を通って行った波は，$V-v$〔m〕の中にあるため，これを一個当たりの波の長さ，つまり波長 λ で割ると個数が得られます。従って，運動している観測者は

$$f'=\frac{V-v}{\lambda}$$

の振動数の音を聞くことになります。或は，これを関係 $f=\frac{V}{\lambda}$ を用いて波長 λ の代わりに元の振動数 f を用いて表すと次式のようになります。

$$f'=\frac{V-v}{V}f \tag{2.92}$$

2.3.2 公式の導出

以上で準備が整ったので次のステップに進みましょう。先ず，次の点に注意して下さい。ドップラー効果は，振動数（または波長）の変化に関する現象であるため，波動像の立場の方が分かり安いですが，アインシュタインにより『光は媒質を要しない“粒子”的存在でもある』ことが指摘され，その後のド・ブロイの『物質波の仮説』の実験的検証を経て，すべてのミクロ粒子も波動性を有していることが明らかになったことを考慮すると，粒子像の立場で扱うことにも意味があるように思われます。特に，これに依ってあまりポピュラーではない電子等のミクロ粒子もドップラー効果を起こし得ることが理解されるでしょう。ただし，粒子像から始めた場合は，最後の段階で，波動像からの量 (波長 λ，角振動数 ω) と粒子像からの量 (エネルギー E, 運動量 $\vec{p}$) とを結びつける次のプランク=アインシュタイン=ド・ブロイの関係を用いる必要があることは言うまでもないでしょう。

$$E=\hbar\omega,\quad \lambda=\frac{h}{p},\qquad ただし\quad \hbar\equiv\frac{h}{2\pi},\quad p=|\vec{p}| \tag{2.93}$$

ここで，もちろん h はプランク定数です。

2.3.2.1 波動像からの導出

公式の導出には，次の 2 種類の方法があります。

[1] 『運動系の時間はゆっくり進む』という“固有時間”の考え方を考慮に入れて音の場合と同様の手順で求める。

[2] ローレンツ変換の式を直接用いて求める。

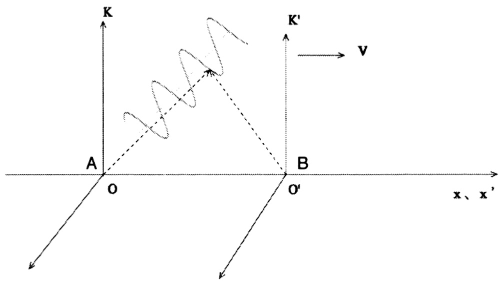


図 2.14 **2つの基準系から見た波**

[1] による方法は読者に任せて，ここでは，より一般的な結果が容易に得られる [2] の方法を取り上げて説明することにしましょう。

節 §2.2.8.2 で扱ったと同じ慣性基準系 K,K' と，２人の慣性観測者 A,B を考えましょう。今，A のいる K 系の座標原点に波源があり，A が時刻 0 に，角振動数 ω_0，波数ベクトル $\vec{k}_0$ の単色の波を放出したとします。このとき，この波は A によっては

$$u(t,\vec{r}) = u_0 \sin(\omega_0 t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r}) \tag{2.94}$$

と表され[*32]，B によっては

$$u(t',\vec{r'}) = u_0 \sin(\omega t' - \vec{k} \cdot \vec{r'}) \tag{2.95}$$

と表されます[*33]。

波の振動の状態，つまり，静穏な状態からの波の変位の量は，観測者に依らないため

$$u(t,\ \vec{r}) = u(t',\vec{r'}) \tag{2.96}$$

[*32] より厳密には，位相は $\omega_0\ t - \vec{k}_0\ \cdot \vec{r} + \delta$ として初期位相 δ を加えるべきですが，設定により，時刻 0 では A,B は共に同じ場所にいてこの瞬間に光が放射されたため，初期位相は両者で同じになります。従って，これを 0 としても以後の結論は同じになります。

[*33] 電磁波（光）は，本書の冒頭部でも見たように，唯一の成分しか持たないスカラー波ではなく，電界と磁界とが交互に相手を生み出しながら空間中を伝播して行く成分を持った波です。しかし，ここでのように偏極等の“内部構造”を問題にするのでなければ，すべての成分について扱いは同じであるため，スカラー波として扱っても結論は同じになります。

が成り立ちます。従って，

$$\omega_0 t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r} = \omega t' - \vec{k} \cdot \vec{r'} \tag{2.97}$$

が成り立っていることが分かります。

ところで，A から見た時刻 t での波の振動点 $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ は，B から見た時刻 t' での波の振動点 $\vec{r'} \equiv (x', y', z')$ に対応するため，x 方向ブースト変換の式 (2.68) により

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x') \end{cases}$$

が成り立ちます。今これらを (2.97) に用いると

$$\omega_0 \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) - k_{0x}\gamma(x' + vt') - k_{0y}y' - k_{0z}z' = \omega t' - \vec{k} \cdot \vec{r'} \tag{2.98}$$

が得られます。この式が，任意の時刻の波の振動点についても成り立つことを考慮すると，次の求める振動数と波数ベクトルについての変換則が導かれます。

$$\omega = \gamma(\omega_0 - k_{0x}v) \tag{2.99}$$

$$k_x = \gamma\left(k_{0x} - \omega_0 \frac{v}{c^2}\right) \tag{2.100}$$

$$k_y = k_{0y} \tag{2.101}$$

$$k_z = k_{0z} \tag{2.102}$$

因みに，この変換式と x 方向ブースト変換の式 (2.68) との比較から，角振動数 ω と波数ベクトル $\vec{k}$ の組

$$k^\mu \equiv \left(\frac{\omega}{c},\ k_x,\ k_y,\ k_z\right) \tag{2.103}$$

が反変４元ベクトル（**波数４元ベクトル**と呼ばれています）として振る舞うことが分かります。

2.3.2.2　電波または光のドップラー効果

(2.89) が成り立つ光や電波の場合について考えましょう。このとき，(2.89) と波数ベクトルの定義式 (2.87) とを考慮すると，(2.99) から，角振動数の間の関係式が導かれます。

$$\omega = \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,\omega_0 \tag{2.104}$$

更に，この結果も合わせると (2.100) から

$$\cos\alpha' = \frac{\cos\alpha - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\alpha} \tag{2.105}$$

が得られます。ここで，α，α' は，もちろん観測者 A,B から見たそれぞれの x, x' 軸と光の伝播方向との成す角です[*34]。以下に，α の典型的な場合を取り上げて説明することにしましょう。

レッドシフト　$\alpha = 0$ $(\beta = \gamma = \frac{\pi}{2})$，つまり波がその伝播方向に逃げる観測者 B を追いかける場合を考えましょう。

このとき B から見た光の振動数は，(2.104) により

$$\omega_{rs} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}}\,\omega_0 \tag{2.106}$$

となり，A の ω_0 より小さくなります。この現象は，振動数とは逆の関係にある波長では長い方（赤色の方）への移動を意味するためレッドシフト（赤方偏移）と呼ばれています。

ブルーシフト　波の向きは，レッドシフトの場合と同じ $\alpha = 0$ $(\beta = \gamma = \frac{\pi}{2})$ で，観測者 B が，A，つまり波源に向かって速さ v で近づく場合を考えましょう。

これ対応する式は，レッドシフトの式 (2.106) で，単に $v \to -v$ とすることによって得られます。つまり，このときの光の振動数は

$$\omega_{bs} = \frac{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}}\,\omega_0 \tag{2.107}$$

となり，これより B は，A より大きい振動数（短い波長）の波を観測することが分かります。

横ドップラー効果　$\alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき，波の伝播方向としては，$\beta = 0$，$\gamma = \frac{\pi}{2}$ と $\beta = \frac{\pi}{2}$，$\gamma = 0$ の 2 つの可能性があります。これらは，それぞれ光が y 軸，または z 軸に沿って伝播する場合に相当します。これらの何れの場合にも

$$\omega_{ts} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,\omega_0 \tag{2.108}$$

[*34] 因に，$\alpha' = \alpha + \Delta\alpha$ として，$\cos\Delta\alpha \approx 1$，$\sin\Delta\alpha \approx \Delta\alpha$，$\frac{1}{1-\frac{v}{c}\cos\alpha} \approx 1 + \frac{v}{c}\cos\alpha$ に注意すると，(2.105) のニュートン近似から光の光行差として知られている関係式 $\Delta\alpha \cong \frac{v}{c}\sin\alpha$ が導かれます。

となります。

この式は，B の運動方向に垂直にやって来た光の振動数を B が測定したときの予想式ですが，波に対して B は近づきも遠ざかりもしていません。従って，この現象は，相対論によって予測された“固有時間”による効果と言えます[*35]。

実際に，このことは，(2.108) のニュートン近似 $\frac{v}{c} \ll 1$ を考えると

$$\omega_{ts} \sim \omega_0$$

となり，ニュートン理論では起こり得ない現象であることからも知ることができるでしょう。

2.3.2.3 粒子像からの導出

後の節 §2.6 で学ぶように，相対論的エネルギー E と運動量 $\vec{p}$ とを一体とした

$$p^i = \left(\frac{E}{c},\ \vec{p}\right) \tag{2.109}$$

が，反変4元運動量として x 方向ブースト変換により $x^i = (ct,\ \vec{r})$ と同じ変換をすることから

$$\left\{\begin{array}{c} p'_x = \gamma(p_x - \frac{V}{c}\ \frac{E}{c}) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \\ E' = \gamma(E - V\ p_x) \end{array}\right. \tag{2.110}$$

が得られます。ここで，もちろん $E, \vec{p}$ は，A から見た粒子（光子や電子など）の相対論的なエネルギーと運動量で，プライム（'）を付けたものは B から見た対応する量です。

(2.110) に，プランク=アインシュタイン=ド・ブロイの関係 (2.93) を用いると (2.99)〜(2.102) と同じ関係式が再び得られることは容易に理解されるでしょう。

問 ニュートン近似 ($\frac{v}{c} \ll 1$) においては，(2.106)，(2.107) は音の場合の対応する式と一致することを示しなさい。

---

*35 光源の静止系 K で Δt 秒間に $f_0 \Delta t$（f_0 [Hz]$(\omega_0 = 2\pi f_0)$）個の波が放出されたとします。伝播する光にとっては，K' 系は静止しているのと同じであるため，同じ数の光が対応する時間 $\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\Delta t$ の間に K' 系に到達します。従って，$f_0 \Delta t = f\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\Delta t$ が成り立つため，これより $f = \frac{f_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ が導かれます。

2.3.3 膨張宇宙とドップラー効果

光のドップラー効果が，銀河や星の速度の測定に積極的に応用されて，その結果として再検証されたハッブルの法則が膨張宇宙論の有力な証拠となっていることは良く知られていることでしょう。この節では，この話題を取り上げて説明することにしましょう。

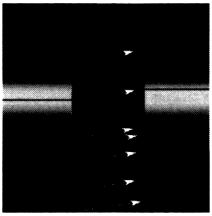


図 2.15 赤方偏移のイメージ図

2.3.3.1 レッドシフトと後退速度

レッドシフト，つまり星の出す光のスペクトルの波長の長い方への変移を，イメージ的に表すと図 2.15 のようになります[*36]。

■レッドシフトの定義式 レッドシフトを表すために，次の無次元の量 z が用いられています。

$$z \equiv \frac{\lambda_{\mathrm{obs}} - \lambda_{\mathrm{em}}}{\lambda_{\mathrm{em}}} \tag{2.111}$$

ここで，λ_{obs} は観測者が観測する光の波長で，λ_{em} は光源が発する光の波長です。もちろん，これらが一致するときは $z = 0$ です。

■z と後退速度の関係 先に求めた (2.106) は，観測者が速さ v で光源に対して逃げている場合の式ですが，観測者から見れば光源が同じ速さで遠ざかっている場合に対

*36 ここで扱うレッドシフトは，ドップラー効果に基づくものですが，他に重力によるものもあります。これについては，後の節 §4.3 で扱います 。

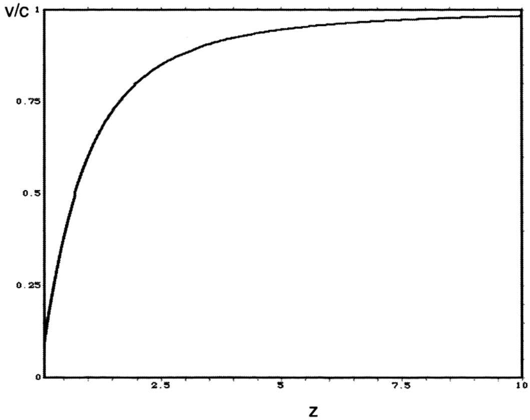


図 2.16　**レッドシフト z と後退速度との関係** 横軸が z で縦軸が $\frac{v}{c}$

応します。従って，今 $\omega_0 = 2\pi f_{\mathrm{em}}$，$\omega_{\mathrm{rs}} = 2\pi f_{\mathrm{obs}}$ と置くと

$$f_{\mathrm{obs}} = f_{\mathrm{em}}\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$$

が得られ，更にこれに波長と振動数の間の関係

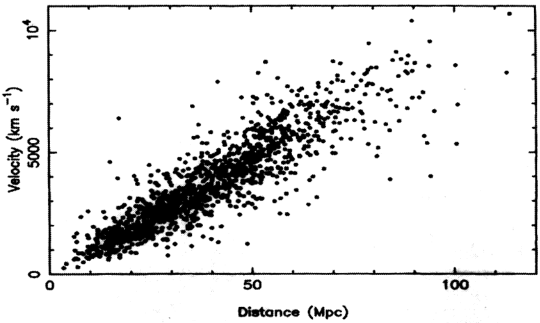
$$\lambda_{\mathrm{em}} = \frac{c}{f_{\mathrm{em}}}, \quad \lambda_{\mathrm{obs}} = \frac{c}{f_{\mathrm{obs}}}$$

を用いて波長の関係に変換して，最後にそれをレッドシフトの定義式 (2.111) に代入して整理することによって

$$\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{z(z+2)}}{\mathbf{z(z+2)+2}} \tag{2.112}$$

という結果に導かれます。この式から，観測した銀河や星の後退速度 $\frac{v}{c}$ は，この星のレッドシフト z の観測値から計算できることが分かります。図 2.16 は z 値を横軸にしてこの関係を図示したものです。

問　$z = 2$ の星の後退速度を，光速比で求めなさい。



A plot of velocity versus estimated distance for a set of 1355 galaxies. A straight-line relation implies Hubble's law. The considerable scatter is due to observational uncertainties and random galaxy motions, but the best-fit line accurately gives Hubble's law. [The x-axis scale assumes a particular value of H_0.]

図 2.17 このデータは参考文献 (13) より借用したもので，横軸がメガパーセクを単位とした距離，縦軸が km/s を単位として測った銀河の後退速度です。

2.3.3.2 ハッブルの法則

ハッブル (Hubble) は，ハッブルの法則として知られるようになった次の関係を発見しました (1929 年)。

$$\mathbf{v} = \mathbf{H_0}\ \mathbf{r} \tag{2.113}$$

ここで，H_0 は T^{-1}（時間の逆数）の次元を持つ**ハッブル定数**と呼ばれている定数[*37]で，r は銀河間の距離（もちろん，宇宙のどの地点も宇宙の中心と云う観点に立てば，我々から観測銀河までの距離とも言えます）です。

図 2.17 は，参考文献 (13) より借用したものですが，1355 個の銀河の観測データをもとにプロットしたものです。観測上の誤差や予測が不可能な銀河の運動などの原因に依るばらつきはあるものの，この図からもハッブルの法則の正しさを読み取ることができるでしょう。

ハッブルの関係式 (2.113) から，より遠い天体ほど早い速さで我々から遠ざかっていることが分かります。そしてこれが膨張宇宙論の有力な根拠であることは言うまで

[*37] 現在の膨張宇宙論では定数ではなく時間変動する量で，H_0 は現宇宙での値と考えられています。これについては後の節 §5.4.1 で扱います。

もないでしょう。

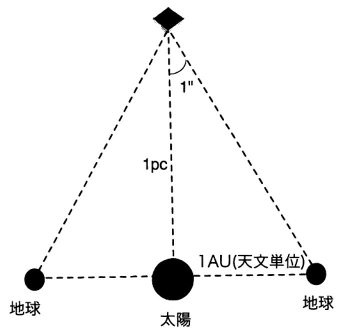


図 2.18　**1pc とは？**

■問　1pc（パーセク）は，図 2.18 に示したように，太陽と地球から引いた直線の成す角（年周視差）が，1"（秒角）となる距離です。この値を，地球と太陽の平均距離（1 天文単位 1.49598×10^8km）を 1.5×10^8km として km で求めなさい。また，1 年 (365.2422 日) を 365 日，光速 (2.99792458×10^5km/s) を 3.0×10^5km/s] として計算して光年で表しなさい。

2.3.4　銀河回転曲線問題

1970 年代にヴェラ・ルービンにより指摘され，後に，中性の水素原子の出す 21cm 輝線のレッドシフトの測定により確認された，現在『銀河回転曲線問題』として知られている現象があります。*38。この節ではこれについて説明しましょう。

図 2.19 の右図は，参考文献 [13] より借用したものですが，この図の上のデータはろ座 (Fornax) の中心近くにある地球から 4500 万光年の所に位置する NGC1097 と命名された棒状渦巻形銀河に関する測定データです*39。この図のデータ，およびそ

*38 中性水素原子（HI,^1H）の出す 21cm 輝線は，1420MHz の振動数の，基底状態にある水素の核（陽子）と電子のスピンが互いに平行な状態から反平行な状態へ遷移するときに発せられる電波で，$\sim 10^7$ 年間に一度の割合で起こる非常にレアな現象であるため，輝線の幅は非常にシャープで，ドップラー効果の測定に適しています。

*39 ろ座は 18 世紀 ラカーユによりフラスコを加熱する炉に因んで命名されもので，NGC は New

の下の図 (NGC891) のデータから，以下に記すような問題点があることが分かるでしょう。

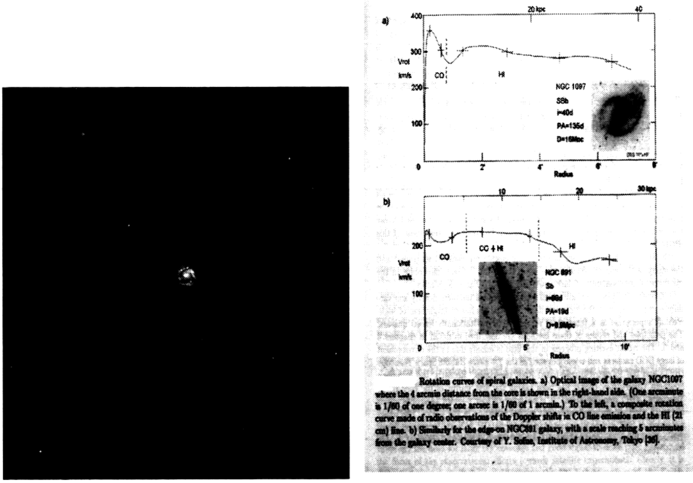


図 2.19　左図は http://ja.wikipedia.org/wiki/NGC_1097 より，右図は，参考文献 [13] より借用したものです。

2.3.4.1　問題点

銀河を取り巻く星間ガスの分布は，光学的に見ると中心核や円盤の銀河面に集中していて中心から離れるに従って少なくなり，中心から $4'$ 角（約 20kpc）離れた所ではほとんど分布していないように見えます。一方，ドップラー効果による星間ガスの速さ測定では，図のデータからも分かるように，その速度分布は周辺でも中心部とほとんど同じ値を保っているように見えます。この測定結果は，もし“光っている物質以外に物質が無いとするなら”，ケプラー（Kepler）がティコ・ブラーエの惑星の観測記録を基にまとめた３つの経験法則の一つ（ケプラーの第３法則として知られています）と明らかに矛盾します。これが銀河回転曲線問題として知られる現象です。この矛盾点について少し詳しく見てみましょう。

ケプラーの第３法則は，太陽の周りを回る惑星の公転周期 T の２乗が，楕円の長半

General Catalogue の頭文字で 1888 年ドレイヤー・ハーシェル等が作成した GC に加筆したものを指します。

径 a の3乗に比例するというものですが，これを太陽の代わりに銀河コアを当て，まわりの星や星間物質を惑星とみなして，これが半径 a，速さ v で円運動をしているとします。このとき，$T = \frac{2\pi a}{v}$ となるため，この法則から直ちに

$$v \propto \frac{1}{\sqrt{a}} \tag{2.114}$$

となることが分かります。つまり，銀河の質量分布が中央部に限られる場合，その周りを回る星間ガスの速さは，中心からの距離の平方根分の一で遅く成って行くと予想されます。ところがこれに反して，図 2.19 のデータは，星間ガスの分布が殆ど見られないかなり広範囲に渡って一定値を保っていることを示しています。

先に進む前に次の点に注意しておきましょう。

(1) ケプラーの法則は，力学に万有引力の法則を用いて導き出されるため，ケプラーの法則との矛盾は，力学，または万有引力の法則，あるいは両方との矛盾でもある。

(2) 実験より，銀河の中心核の周りをまわる星や星間物質の公転速度は 300km/s 程度で，これは光速比で 0.001 であるため，ニュートン近似（$\frac{V}{c} \ll 1$）が成り立つ。このため力学との矛盾は特殊相対論との矛盾でもある。逆に言えば，この場合，力学の矛盾を特殊相対論を用いても解くことはできない。

(3) 万有引力の法則との矛盾を意味する可能性はある。これは同時に後に学ぶ一般相対論との矛盾も意味する。なぜなら，特殊相対論の要請を満たした重力理論である一般相対論も重力が弱い場合（ニュートン近似が成り立つ速さを引き起こすレベルの重力）には万有引力の法則と同じ結論を与えるため。逆に言えば，この場合，一般相対論を用いてもこの問題を解くことはできない。

2.3.4.2 解明へ向けて

1980 年代におけるこの問題の提起以来，今日までに，素粒子論や宇宙論の立場から極めて多くの調査研究がなされ，様々な提案がなされて来ています。それらの立場を大別すると次の2通りに分けられるでしょう。

(1) 我々がまだ知らない光を発しない物質（**ダークマター（暗黒物質）**）があるに違いないという立場

(2) 重力理論の修正が必要であるという立場

この内の大勢は圧倒的に（1）のダークマターの存在を信じての調査研究の方にあります。しかし，このダークマターは，素粒子論の“標準理論”から予測されたヒッグス粒子やニュートリノなどでは説明ができず，宇宙初期の環境では成り立つであろう理論，“超対称性理論”から予測される超対称粒子の中のニュートラリーノやグラビティーノであるという有力な説もありますが，超対称粒子の内の一つすら見つかっていない状況であるため，例えこれらの理論が現在知られている事実のすべてを説明できるとしても現段階では単なる一つのシナリオとしか言えないでしょう。

一方，（2）の立場ですが，この中には，一般相対論を自然に拡張した理論として，重力として相対論の主張する時空の曲がりに加えて時空の捩れ（トーション）をも取り入れた重力理論があります。しかしながら，この場合も，トーションを一つの動的な場と考え，ミクロの世界の2重性を考慮するとこれに付随した“粒子”が存在することになり，結局（1）の場合と目的は同じになります。そしてこの場合，トーション場（粒子）がダークマターの役割を演じ得るかが問題となります。

このように何れにしても，何らかの『場』（従って，粒子）を伴わない重力理論の修正は不可能であるように思われます。従って，ダークマターが存在するとの立場からそれが持たなければ成らない性質を実験や観測を通じて調べて行くことが重要と成ります。

このような状況にあって，ダークマターの存在の可否を含めその実体を求めて，地上での加速器実験やガンマ線を利用した天体観測や重力レンズ効果を利用した銀河団の観測などにより沢山の証拠集めがなされて来ています。

以下に参考のため，これまでのダークマター絡みの観測結果について簡単にまとめておきます。

(1) 銀河団の構成銀河の軌道速度が，可視的に観測される銀河の総質量の400倍のもの質量に匹敵するほど大きい（ツビッキー1934の質量欠損問題）
(2) 銀河回転曲線問題（ルービン1970年代）
(3) 重力レンズ効果による銀河の形の歪みから“ダークマター”の3次元空間分布図の作成（日米欧研究チーム2007）
(4) ハッブル宇宙望遠鏡による2つの銀河団の衝突の痕跡の観測から“ダークマター”の巨大なリング構造の発見（NASA 2007）
(5) 国際宇宙ステーション上に設置した装置に依り，ダークマターをニュートラリーノと仮定したときこれらの粒子が衝突して消滅する際に放出する陽電子の観測から暗黒物質の存在の痕跡を見つけたと発表（2013CERN）

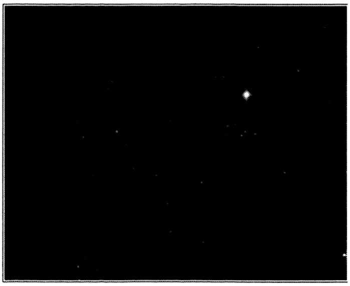


図 2.20　**MACS J0025.4-1222 銀河団（56 億光年）** 2 つの親銀河団が高速で衝突した際に，暗黒物質と目に見える物質とが分離してできたことを示している？
　写真は光学望遠鏡と X 線望遠鏡の画像の合成。中央部の目に見える物質が衝突で減速しているのに対して，暗黒物質は速度を変えず通り抜けて 2 つの塊に分離している様子を表しているとか。この資料はネットより借用したもの。

2.4　相対論的運動学

ニュートン力学に代わる新しい力学について説明する前に，先ず，相対論的運動学について考えることにしましょう。これにより力学との相違がより明確なものとなるでしょう。

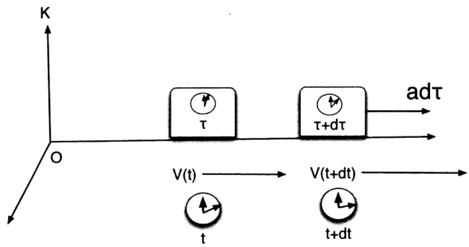
運動学で重要なのは加速度の概念です。これを相対論ではどのように取り扱うのでしょうか。以下に見るように，直線運動の場合と一般の運動の場合とでその扱いに相違があることに注意しましょう。先ずは，直線運動の場合から見て行くことにします。

2.4.1　直線運動

物体が一直線上を加速度運動をしているとします。これをある慣性系の観測者（A とします）が観測している場合を考えましょう。

時刻 t（物体の固有時刻では τ）で A が観測した物体の速さを $V(t)$ として，次の瞬間，つまり時刻 $t+dt$ での物体の速さ $V(t+dt)$ を，相対論的速度合成則を用いて求めることにしましょう。手順は次の通りです。

(1) 時刻 τ の物体から見た，時刻 $\tau+d\tau$ での物体の速さは，$a\,d\tau$ であったとしま



す。ただし，a は一般には τ，従って t の関数です。

(2) このとき，A が観測する物体の速さ $V(t+dt)$ は，(2.74) の最初の式から $V(t+dt) = \frac{V+ad\tau}{1+\frac{Vad\tau}{c^2}}$ と結論されます[*40]。

(3) (2) で得た式をテイラー展開して dt, $d\tau$ について 2 次以上の項を無視すると，左辺から $V(t+dt) \cong V(t) + \frac{dV}{dt}dt$ が，右辺からは $(1-\frac{V^2}{c^2})ad\tau$ が得られます[*41]。

以上の手順により次の式が導かれるでしょう。

$$\frac{dV}{dt} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} a \tag{2.115}$$

ところで，手順 (1) で仮定した $d\tau$ 間の速度変化 $ad\tau$ は，この間に実際に物体に働いた何らかの力によって引き起こされた速度変化と考えることができるため，『速度変化は働いた力に比例する』という力学の法則を引き継ぐと，この a が本来の意味での加速度と解釈することができます。従って，この式を a についての式に書き直すことは意味があるでしょう。書き換えに際し，次の関係

$$\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} dV = d\left(\frac{V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)$$

---

*40 (2.74) の最初の式で $v \to -v$ と置いて得られる逆の関係式で $v \to V(t)$, $v'_x \to ad\tau$, $v_x \to V(t+dt)$ と置けば得られます。

*41 この結果は，$(1+x)^n$ が，x が小さいとき任意の n に対して $1+nx+\cdots$ と展開されることに着目して，右辺をまず $(V+ad\tau)(1-\frac{Vad\tau}{c^2})$ と近似して展開し $d\tau$ について 2 次以上の項を無視すれば得られます。

が成り立つことに注意すると，加速度 a は，次のより簡潔な形に書き表されることが分かります。

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right) \tag{2.116}$$

2.4.1.1　等加速度直線運動

(2.116) で $a =$ 一定の場合，つまり，常に同じ力が物体に働いていて，その物体から見た自身の速度変化が常に同じで直線運動をしている物体を，その運動方向を x 軸に設定した慣性観測者 A が観測した場合について考えましょう。

$a = g(>0)$ と置いて，(2.116) を $V = 0$ の時刻 $t = 0$ から任意の時刻 t まで積分します。これにより直ちに，$t = 0$ 以後の物体の時々刻々の速さが求まります。

$$V = \frac{gt}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}} \tag{2.117}$$

図 2.21 は，$g = 9.8m/s^2$ としたときの $V(t)$ の変化の様子を図示したものです。

時刻 $t = 0$ での位置を $x = 0$ として，(2.117) を更に t について積分すると，$t = 0$ 以後の時々刻々の物体の位置を知ることができます。

$$x = \frac{c^2}{g}\left[\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}} - 1\right] \tag{2.118}$$

この関係は

$$\frac{(x+\frac{c^2}{g})^2}{(\frac{c^2}{g})^2} - \frac{c^2t^2}{(\frac{c^2}{g})^2} = 1 \tag{2.119}$$

と書き直して，t を横軸，x を縦軸に取ってグラフに描くと，これは双曲線の一部分であることが分かります。図 2.22 は，$g = 9.8m/s^2$ のときのこの様子を描いたものです。

■問　2010 年 10 月 1 日，地球から 20 光年の恒星グリーゼ 581 の地球型惑星 Gliese581g から規則的な信号が受信されたと話題になりました。今，この惑星から一定の加速度 $9.8\mathrm{m/s^2}$ で直線的に地球に向かっているロケットがあるとして，以下

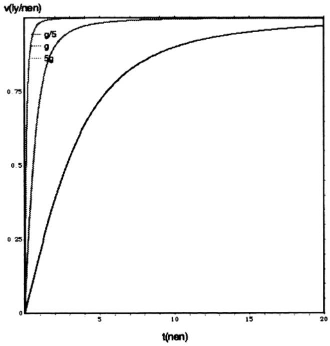


図 2.21 横軸は年を単位にした時間で，縦軸は光速を単位とした物体の速さです。このグラフから，地表での重力と同じ力を受けて加速を続けると 1 年で光速の約 65 %，2 年で約 85 %，7 年で光速に近い値に達することが分かります。

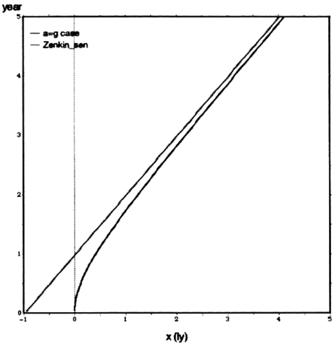


図 2.22 横軸は光年を単位にした距離，縦軸は年を単位にした時間です。(2.120) によると 0.97 年後までの地球の姿までしか物体には届かなくなる計算です。

の問に答えなさい*42 。

(1) 地球に到達するのは何年後になりますか。光速を $c = 3.0 \times 10^5$km/s，1 年を 365 日として計算しなさい。
(2) このとき，ロケット内では何年経過したことになりますか。**ヒント**：(2.117) を以下の式に代入して積分し，$t = \frac{c}{g}\sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right)$ が得られることを確認して用いなさい。

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}dt$$

2.4.1.2 事象の地平

一定の加速度 g で原点から直線的に遠ざかる物体の $t - x$ 図は，双曲線の方程式 (2.119) によって記述されることを見ました。この双曲線の漸近線の一つは，$ct = x + \frac{c^2}{g}$ で，これはもちろん，ct 軸との切片が $\frac{c^2}{g}$，x 軸との切片が $-\frac{c^2}{g}$ で，傾きが 1 の直線です。

*42 Maxima による解答，および，図 2.23 のプログラムは，付録の節 §B.5.1 にあります。また，付属の CD-ROM には対応するファイルがあります。参考にして下さい。

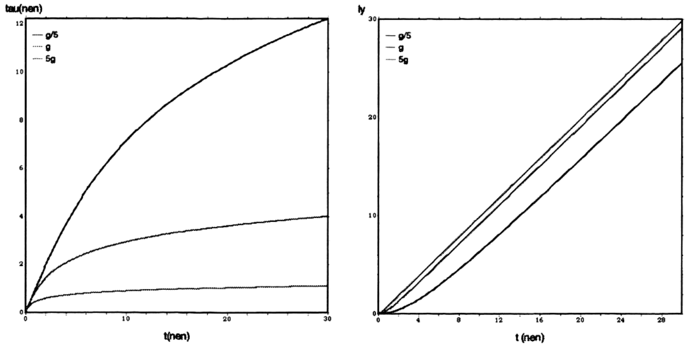


図 2.23　**左図：**地球時間と固有時間の関係（横軸は，地球時間（年），縦軸はロケットの時間（年），グラフは下から順に $a = 5g(\fallingdotseq 50m/s^2)$，$g \fallingdotseq (10m/s^2)$，$\frac{g}{5}(\fallingdotseq 2m/s^2)$)，**右図：**時間と距離の関係（横軸は，地球時間（年），縦軸は距離（光年），グラフは上から順に $a = 5g$，g，$\frac{g}{5}$)

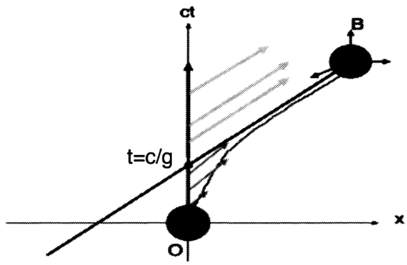


図 2.24　原点 O の物体は，加速度系の観測者 B からは，物体の時刻で $t = \frac{c}{g}$ までの姿しか見えない

このことから，時刻

$$t = \frac{c}{g} \tag{2.120}$$

以後に原点 O から発せられた光は，物体上の観測者 B には決して届きません。このことは，これらの光の軌道が漸近線 $ct = x + \frac{c^2}{g}$ に一致するか，それに平行でその外側に来ることから分かります。つまり，B は O に置かれた物体の姿を，O の時間で $t = \frac{c}{g}$ を越えた姿は見ることができず，この時刻に至るまでの姿を見続けることにな

ります。

2.4.2 一般の運動

絶対時間を前提とするニュートンの運動方程式は修正の必要がありますが，『実際に物体に働いた力が，それに比例した速度変化（加速度）を物体に引き起こす』という力学の基本法則はそのまま成り立っているように思われます。

実際に，直線運動の場合の相対論的加速度の式 (2.116) は，この基本法則に沿って求めました。今，これを一般化するためには，一般の速度合成則 (2.76) を用いて進めばよいと思われます。取り敢えず，この方針で考えてみましょう。

ある慣性系の観測者 A が，時刻 t に速度 $\vec{v}(t)$ で運動している物体を観測したその瞬間に，その物体はある力 $\vec{f}$ を受けて dt 秒後にはその速度が $\vec{v}(t+dt)$ になったとします。このときの A から見た物体の速度変化量 $\vec{v}(t+dt)-\vec{v}(t)$ は，速度 $\vec{v}(t)$ の物体から見た物体の速度を $\vec{a}d\tau$ とすると，(2.76) の逆の関係として得られる速度合成則

$$\vec{v}(t+dt)=\frac{\left\{\vec{a}+\frac{\gamma-1}{v^2}(\vec{a}\cdot\vec{v})\vec{v}\right\}d\tau+\gamma\vec{v}}{\gamma\left(1+\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{c^2}d\tau\right)} \tag{2.121}$$

を用いて求められるでしょう。ここで，$d\tau$ は，$\vec{v}(t)$ から $\vec{v}(t+dt)$ の間に物体の上で経過した時間としています。

(2.121) を，dt, $d\tau$ が十分小さいとして展開し，その結果に $dt=\gamma d\tau$ を用いて，最後に $\vec{a}$ について解くと次の結果へ導かれるでしょう。

$$\vec{a}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)+\gamma(\gamma-1)v\frac{d\vec{e}}{dt} \tag{2.122}$$

ここで，$\vec{v}=v\vec{e}$ と置いたことに注意して下さい。

前提により今の場合，この加速度 (2.122) が，実際に働いた力 $\vec{f}$ により引き起こされたことになります。

2.4.2.1 相対論的加速度

(2.122) は，単純に速度合成則のみを用いて得られた結論でした。しかし，これが本来の加速度であるという保証はありません。実際，すべての慣性系の同等性を基本原理とする特殊相対論では，『自然法則は，慣性系である限り基準系の選択に関係なく同じ』であるため，運動方程式はすべての慣性系で同じ形に書かれることが要請されます（**共変性の要請**）。後のテンソル方程式の節 §2.6 で見るように，この観点から

得られる加速度は，(2.122) の右辺の第２項目を伴わない，従って直線運動の場合と同じ形のベクトル式

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \tag{2.123}$$

と成ります。(2.123) と (2.122) との比較から，実際に物体に生じた速度変化 $\vec{a}d\tau$ の内，$\vec{v}$ に垂直な成分については，観測者 A のそれとの関係が単純には速度合成則だけからは得られないことが想像されます。

考察を続ける前に先ず，速度合成則 (2.121) から $\vec{v}$ に平行に運動している粒子に対しては

$$\vec{v}_p = \frac{\vec{v}+\vec{v'}_p}{1+\frac{vv'_p}{c^2}} \tag{2.124}$$

となるため，$\vec{v'}_p = \vec{a}_{\parallel}d\tau$ として予測される加速度 $\vec{a}_{\parallel}$ は

$$\vec{a}_{\parallel} = \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \tag{2.125}$$

となり，一方，垂直に運動している粒子に対しては

$$\vec{v}_p = \vec{v} + \frac{\vec{v'}_p}{\gamma} \tag{2.126}$$

となるため，速度変化 $\vec{v'}_p = \vec{a}_{\perp}d\tau$ から予測される“加速度” $\vec{a}_{\perp}$ は

$$\vec{a}_{\perp} = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{2.127}$$

となることに注意しておきます。

考察を続けましょう。問題を $\vec{v}$ に垂直な場合に絞って考えることにします。図 2.25 のように，慣性系 K に対して一定の v_1 の速さで x 軸方向に運動している慣性系 K' 系からその y' 軸の正方向に一定の v_2 の速さで物体 P を放出した場合を考えることにします。そして，その P の静止系を K"系としましょう。

この場合，K から K"系への変換は，以下に示すように，２度の連続したブースト変換の合成によって成されることに注意しましょう。

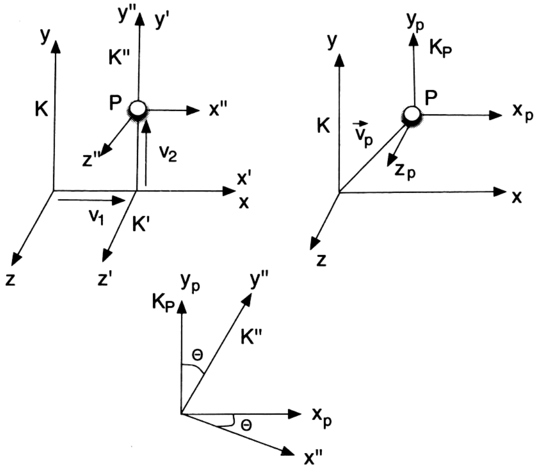


図 2.25　上段左図は，K 系から K' 系へ，そして K' から K" 系への連続ブースト変換 B_yB_x を，右図は，K 系から $\mathrm{K_P}$ 系への $\vec{v}_p$ 方向ブースト変換 $B_{\vec{v}_p}$ を，そして下段は K" と $\mathrm{K_P}$ 系とが回転の関係にあることを示しています。

(1) K から K' への x 方向ブースト変換

$$B_x = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\beta_1\gamma_1 & 0 & 0 \\ -\beta_1\gamma_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.128}$$

(2) K' から K"への y 方向ブースト変換

$$B_y = \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & -\beta_2\gamma_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_2\gamma_2 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.129}$$

(3) K から K"への合成変換

$$B_yB_x = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2 & -\beta_1\gamma_1\gamma_2 & -\beta_2\gamma_2 & 0 \\ -\beta_1\gamma_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ -\beta_2\gamma_1\gamma_2 & \beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.130}$$

ただしここで，$\beta_{(1,2)} = \frac{v_{(1,2)}}{c}$，$\gamma_{(1,2)} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_{(1,2)}^2}}$ と置いています。

ところで，速度合成則 (2.126) を用いると，K 系から見た物体 P の速度 $\vec{v}_p$ は，今の場合

$$\vec{v}_p = (v_1, \frac{v_2}{\gamma_1}, 0) = c(\beta_1,\ \frac{\beta_2}{\gamma_1},\ 0) \tag{2.131}$$

と成ります。従って，K 系からこの速度 $\vec{v}_p$ の方向へブースト変換すれば物体 P の静止系 K" へ直接移ることができそうですが，結果は図に示したように別の基準系 K_P へと移行してしまいます。これが平行な場合との決定的な相違です。

もちろん，K_P 系は，(2.69) に $\vec{v} \to \vec{v}_p$ と置いて得られる変換行列

$$\begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2 & -\beta_1\gamma_1\gamma_2 & -\gamma_2\beta_2 & 0 \\ -\beta_1\gamma_1\gamma_2 & \frac{\beta_1^2\gamma_1^3\gamma_2^3+\beta_2^2\gamma_2^2}{\gamma_1^2\gamma_2^2-1} & \frac{\beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2^2(\gamma_1\gamma_2-1)}{\gamma_1^2\gamma_2^2-1} & 0 \\ -\beta_2\gamma_2 & \frac{\beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2^2(\gamma_1\gamma_2-1)}{\gamma_1^2\gamma_2^2-1} & \frac{\beta_1^2\gamma_1^2\gamma_2^2+\gamma_1\beta_2^2\gamma_2^3}{\gamma_1^2\gamma_2^2-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.132}$$

により K 系から得られますが，これと (2.130) とを比較して分かるように，K"系は K_P をその z 軸の回りに次の角度 Θ だけ回転したものと一致します。

$$\sin\Theta = -\frac{\beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1\gamma_2+1} \tag{2.133}$$

$$\cos\Theta = \frac{(\beta_1^2\gamma_1+\beta_2^2\gamma_2)\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1^2\gamma_2^2-1} \tag{2.134}$$

K"系は物体に結びついた系で，K_P 系は K 系を“平行移動”したものであることを考慮すると，以上のことから，K' 系の観測者が実際にある力を加えて放出した物体 P には，K 系の観測者からはこの力の他に，物体を回転させるような力が働いているように見えることが分かります。これが $\vec{v}$ に垂直な加速度成分については単純に (2.127) とは結論できない理由と考えることができます。因に，この力は，ある向心力の下に円運動をしている独楽（こま）に作用してトーマス (Thomas) 才差と呼ばれる首振り運動を起こさせる力と同種の力と見なすことができるでしょう[*43]。

---

*43 トーマス才差についての詳しい説明は，例えば参考文献 [10] を参照して下さい。

2.5 相対論的力学

2.5.1 運動方程式

(2.123) を相対論的加速度と考えて，力学の基本法則に従うと相対論的運動方程式は，次のように書かれると結論されます。

$$\vec{f} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \tag{2.135}$$

ここで，m_0 は物体に関係する量で，物体の静止時の質量（静止質量と呼ばれています）です。

2.5.2 運動量とエネルギー

2.5.2.1 相対論的運動量

(2.135) の右辺のカッコ内の式

$$\vec{p} \equiv \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.136}$$

を考えましょう。これはニュートン近似（$\frac{v}{c}$ の 1 次までの項のみ）では $m_0\vec{v}$ となるため，相対論的に拡張された運動量とみなすことができます。今，これを相対論的運動量と呼び，ニュートンの場合と同じように $m\vec{v}$ と書くと

$$m \equiv \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.137}$$

を新たな質量とみなすことができます。

ところで，力学では，物体の速さはいくらでも速くなれますが，相対論では上限 c が存在します。この場合，一定の力が物体に働き続けた場合を考えると，速さが c で頭打ちになるためには，物体の質量が速さと共に大きく成って行く必要があります。この意味で，(2.137) は，質量についてのこの要請に合致していることが分かります。

最後に，相対論的運動量 (2.136) を用いると，運動方程式 (2.135) は

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{2.138}$$

とも書かれることに注意しておきます。

2.5.2.2　相対論的エネルギー

ニュートン力学の場合と同じように，(2.135) の両辺と $\vec{v}$ との内積を取り，

$$\vec{f} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \tag{2.139}$$

更に，これを時間について $t = 0$ から時刻 t まで積分すると

$$\begin{aligned}\int_0^{\vec{r}} \vec{f} \cdot d\vec{r} &= \left[\frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]_0^v - \int_0^{\vec{v}} \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot d\vec{v} \\ &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 \end{aligned} \tag{2.140}$$

が得られます。この左辺は，時刻 $t = 0$（このとき，物体は原点に静止していたとします）から時刻 t（このときの物体の位置は $\vec{r}$）までに力 $\vec{f}$ が成した仕事に等しいため，右辺はこの仕事によって物体が獲得した“運動エネルギー”に等しいことが分かります。最後の $m_0 c^2$ は，もちろん物体が静止時（$\vec{v} = 0$ のとき）にも持つエネルギーで，**静止エネルギー**と呼ばれている量です。

(2.140) の右辺が，運動エネルギーであることは，例えば，右辺第 1 項を $\frac{v}{c}$ で展開してニュートン近似で考えれば，

$$W \sim \frac{1}{2} m_0 v^2$$

となることで納得がいくでしょう。

因に，相対論では，静止エネルギーを含めた (2.140) の右辺の第 1 項

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.141}$$

を**相対論的エネルギー**と呼んでいます。

■静止エネルギー 先に見たように，静止エネルギーは，粒子が質量を持ってさえいれば静止しているときにも潜在的に持っているエネルギーで，ニュートン力学では予測することすら出来なかったエネルギーです。

このエネルギー量は，光速 c が 3×10^8m/s と非常に大きいため，例え質量が 1g としても

$$m_0 c^2 = 1 \times 10^{-3} \times 9 \times 10^{16} = 9 \times 10^{13}\mathrm{J}$$

となります。このエネルギーがどれ程大きいかは，1J が，1kg の物体を約 10cm 持ち上げるために必要なエネルギーに相当することから容易に想像できるでしょう。もちろん，現在の科学は，物質の持つ質量をすべてエネルギーに解放する方法や手段を持っていません。原子力発電などでも，ほんの一部分を取り出して利用しているにすぎません。

問

1g の質量の物体が潜在的に持つエネルギーで，50kg の体重の人を 1m 持ち上げるとすると，同時におよそ何人の人を持ち上げることができるでしょうか。

2.6 テンソル方程式

『自然法則は，慣性系の選択に関係なく同じである』ことを認めると，自然法則はすべての慣性系で 同じ形，従って『ローレンツ変換の下に不変な形（共変な形）に書くことができるはずです。この節ではこの命題に従って，前節で説明した相対論的力学の方程式へ導くテンソル形式の方程式の導出と，電磁気学の基礎方程式をテンソル形式に書き直すことなどを通じて一般相対論への数学的な準備の一つとすることにしましょう。

2.6.1 2 種類のベクトル

物理学では，相対論を学ぶまではユークリッド空間で事足り，しかも殆どの場合，デカルト座標系（直交座標系）を主体に扱って来たためベクトルに 2 種類あることに殆どの読者が気付いていないでしょう[*44]。これら 2 種類のベクトル，即ち，反変ベ

[*44] もちろん，位置ベクトルや速度などの**極性ベクトル**と，角運動量や力のモーメントなどのような極性ベクトル同士の外積から作られる**軸性ベクトル**との相違については周知のことと思いますが，ここで言う 2 種類のベクトルとは異なります。

クトルと共変ベクトルについては，本テキストでは，既に節 §2.2.7 で紹介しました。この節ではこれらについて復習すると共に，少し数学的に取り扱うことによって先に進むための準備とすることにします*45。

2.6.1.1 **反変ベクトル**

これまでに，時間の流れ方は基準系によって異なるため，出来事の起こった時刻と場所は観測者の基準系と密接な関わりがあり，そのために，時間と空間とが一体と成った仮想4次元空間（ミンコフスキー空間）を想定して，出来事をその空間の点 $(ct,\ x,\ y,\ z)$ として対応付け，そして，その点の間の距離を定義して，その距離を不変にする“回転”（ローレンツ変換）として慣性系間の関係を得てきました。

ところで，3次元ユークリッド空間において，$\vec{r} \equiv (x, y, z)$ を点 (x, y, z) の位置ベクトルと呼ぶように，$(ct,\ x,\ y,\ z)$ の組を，ミンコフスキー空間における位置ベクトルと呼ぶことは自然でしょう。このテキストでは，そのすべての成分 ct, x, y, z を代表するという意味も込めて，その表記を x^i として来ました。つまり

$$x^i = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z)$$

3次元の場合と同様に，位置ベクトルはベクトルの基本です。従って，その他のベクトルは，この x^i を“手本”に定義されますが，その規準となるのがローレンツ変換です。つまり，ローレンツ変換と呼ばれるミンコフスキー空間における座標系の敷き変え*46

$$x'^i = L^i{}_j\ x^j \tag{2.142}$$

に対して，

$$A'^i = L^i{}_j A^j \tag{2.143}$$

と変換する4つの量の組み A^i $(i = 0, 1, 2, 3)$ はすべて，x^i と同じタイプの反変ベクトルとして定義されます。ただし，係数 $L^i{}_j$ は，例えば，x 方向ブースト変換の場合には，

$$(L^i{}_j) = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{V}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{V}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.144}$$

*45 “反変”と“共変”の幾何学的な意味については，後の節 §3.4.3 に譲ります。

*46 このテキストでは，行列全体を表すために $(L^i{}_j)$ のように書くことにします。また，以後，ベクトル同士やテンソル同士ばかりでなく，ここでの $L^i{}_j x^j$ のようにテンソル以外の量との積に対しても同じ添字（ここでは j）が1つの式中で上下に対で現れた場合にはこれらについて和を取るという**アインシュタインの規約**が適用されていることにします。

と表され，また任意の方向へのブースト変換の場合には (2.58) の行列として表現される変換係数です。もちろん，${L^i}_j$ は，この行列による表現の i 行 j 列の成分に当ります。

2.6.1.2 共変ベクトル

ローレンツ変換は，ミンコフスキー空間における距離を不変にする 1 次変換として導きましたが，もちろん，その距離の 2 乗，$s^2 \equiv c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ もこの変換に対して不変です。

今，この s^2 を 4 元位置ベクトル x^i を用いて，できるだけ 3 次元の場合の $\vec{r} \cdot \vec{r} \equiv \vec{r}^2 = x_\alpha x_\alpha$ (α はダミー添字[*47]) のように表すことを考えます。そのために，先ず，

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.145}$$

なる行列で表される定数の集まりを導入して

$$s^2 = \eta_{ij} x^i x^j \tag{2.146}$$

と 2 次形式で書くことができることに注目しましょう。ここで，もちろん，添字 i, j はアインシュタインの和の規約によるダミー添字です。これにより，新たな位置ベクトル x_i を

$$x_i = \eta_{ij} x^j \leftrightarrow (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct,\ -x,\ -y,\ -z) \tag{2.147}$$

として導入すれば，(2.146) は

$$s^2 = x_i x^j \tag{2.148}$$

と 3 次元の場合とまったく同じ形式に書かれることが分かります。

こうして導入した x_i を，共変位置ベクトルと呼べば，その変換性は s^2 が不変量であることから x^i とは真逆であることが分かります。つまり， その変換式を

$$x'_i = {M_i}^k x_k \tag{2.149}$$

と書くと，変換係数 ${M_i}^j$ は

$$x'^i x'_i = {L^i}_j {M_i}^k x^j x_k \Longrightarrow {L^i}_j {M_i}^k = \delta^k_j$$

*47 $x_\alpha x_\alpha$ は，$\sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha x_\alpha$ を表すアインシュタインの和の規約の 3 次元版で，このときの添字 α は和を取られていて真の添字とは異なるという意味で**ダミー添字**と呼ばれます。従って，α の代わりに他の任意のギリシャ文字（3 次元の場合）を用いることができます。

を満たす必要があることから $(L^i{}_j) \equiv L$ とは $(M_i{}^k) \equiv M = \left(L^{-1}\right)^T$ の関係にあることが分かります。或は，成分 $M_i{}^j$ として次のように表すこともできます。

$$x'_i = \eta_{ij} x'^j = \eta_{ij} L^j{}_k \eta^{k\ell} x_\ell \Longrightarrow M_i{}^\ell = \eta_{ij} L^j{}_k \eta^{k\ell} = L_i{}^j \tag{2.150}$$

この最後の手順で， $L_i{}^j$ の添字 i, j についても後に述べる (2.152)，(2.153) と同じルールを適用していることに注意して下さい。これにより，例えば，x 方向ブースト変換の場合では，その 0 以外の成分が，

$$M_0{}^0 = \gamma,\ M_0{}^1 = \frac{v}{c}\gamma,\ M_1{}^0 = \frac{v}{c}\gamma,\ M_1{}^1 = \gamma,\ M_2{}^2 = 1,\ M_3{}^3 = 1$$

となることが容易に分かります。

こうして，今や反変ベクトルの場合と同様に，共変ベクトルは，ローレンツ変換の下に

$$B'_i = L_i{}^j\ B_j \tag{2.151}$$

と変換する 4 つの量の組み $B_i\ (i = 0, 1, 2, 3)$ のすべてに共通の名称として見なすことができます。

2.6.1.3 反変ベクトルと共変ベクトルの関係

位置ベクトル x^i から η_{ij} を用いて共変位置ベクトル x_i を作ったと同様にして，任意の反変ベクトルから対応する共変ベクトルを作ることができます。

例えば，共変ベクトル A_i は，対応する反変ベクトル A^i から

$$A_i = \eta_{ij}\ A^j \tag{2.152}$$

として得られます。こうして得られた共変ベクトルは，η_{ij} の特殊性により，(2.147) のように対応する反変ベクトルの空間成分のみを負にしたものになっています[*48]。

一方，(2.152) を逆に解くと

$$A^i = \eta^{ij}\ A_j \tag{2.153}$$

が得られます。ここで，η^{ij} は η_{ij} と

$$\eta_{ij}\ \eta^{jk} = \delta_i{}^k \tag{2.154}$$

[*48] 相対論関係の教科書には，4 次元距離として $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ を採用するものが多く，このときの η_{ij} としては，空間成分は正のままで，時間成分のみが負と成ります。

の関係，つまり行列で言えば逆行列の関係にある量ですが，η_{ij} の特殊性により，その逆行列は数値的には自分自身に一致し，

$$(\eta^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.155}$$

となります。

因みに，ここで導入した量 η_{ij}, η^{ij} は，ミンコフスキー空間の性質に強く依存しているため，**ミンコフスキー計量テンソル**と呼ばれています。また，δ_{ij} は，$i = j$ のとき 1 でそれ以外は 0 の**クロネッカーのδ**と呼ばれている量で，まとめて書けば単位行列として表されるためその成分と見なすことができます。

2.6.2 テンソル

テンソルについての大まかな説明は，節 §2.2.7.1 で済ませているため，ここでは，より具体的（数学的）な定義をすることにします。

2.6.2.1 テンソルの定義

■2 階のテンソル 2 つのベクトルの各成分を互いに掛け合わせて順序よく並べて作った集合と同じ変換性を持つ 16 個の量の組を 2 階のテンソルと言います。2 種類の位置ベクトルの組み合わせにより，2 階の反変テンソル，2 階の共変テンソル，2 階の混合テンソルの基本形が作られます。一般の 2 階のテンソルは，これらと同じ変換性を有する量として，それぞれ 2 階の反変テンソル，2 階の混合テンソル，2 階の共変テンソルと総称されます。

$$x'^i x'^j = L^i{}_k L^j{}_m x^k x^m \Longrightarrow T'^{ij} = L^i{}_k L^j{}_m T^{km} \quad (\text{反変テンソル}) \tag{2.156}$$

$$x'^i x'_j = L^i{}_k L_j{}^m x^k x_m \Longrightarrow T'^i{}_j = L^i{}_k L_j{}^m T^k{}_m \quad (\text{混合テンソル}) \tag{2.157}$$

$$x'_i x'_j = L_i{}^k L_j{}^m x_k x_m \Longrightarrow T'_{ij} = L_i{}^k L_j{}^m T_{km} \quad (\text{共変テンソル}) \tag{2.158}$$

■n 階のテンソル 同様にして，n 個のベクトルの成分の積を順序よく並べた集合と同じ変換をする 4^n 個の量の組みとして n 階のテンソルを定義します。次のものは 3 階の混合テンソルの例です。

$$T'^{ij}{}_k = L^i{}_m L^j{}_n L_k{}^\ell \, T^{mn}{}_\ell \tag{2.159}$$

この一般の定義から**ベクトルは1階のテンソル**であり，不変量は0階のテンソルということができます。因に，不変量は，唯一の量であるため**スカラー**量でもあります。

2.6.2.2　テンソルの対称性

混合テンソルを除くテンソルの中には，添字の入れ替えに対しても値を換えないものがあります。例えば，2階の反変テンソル S^{ij} が

$$S^{ij} = S^{ji} \tag{2.160}$$

という性質を持つとき，このテンソルは，**対称テンソル**と呼ばれ，独立な成分数は，16個から ${}_4C_2 +$ (対角成分) $= 10$ 個に減ります。また，$A^{ij} = -A^{ji}$ という性質を持つとき，**反対称 (歪対称) テンソル**と呼ばれ，その独立な成分数は ${}_4C_2 = 6$ 個になります。ところで，これら2種類の成分数が合わせて16になることからも分かるように，一般の2階の反変，または共変テンソルは，常に対称テンソルと反対称テンソルの和として書くことができます。

$$T^{ij} = \frac{1}{2}(T^{ij} + T^{ji}) + \frac{1}{2}(T^{ij} - T^{ji}) \tag{2.161}$$

同様の分解が任意の階数の反変，または共変テンソルについても可能ですが，事情はもっと複雑です。しかし幸いにも群論を用いてこの問題を処理することができる系統的な数学的手法が確立されています。それによると，任意の反変，または共変テンソルは，任意の2つの添字の入れ替えに対して同じ値を持つ完全対称な部分と，すべて符号を変える完全反対称な部分，そして何個かの相応する対称性を有する構成テンソルの和として書かれることが示されます。

詳細は他書に譲ることにして，本書では，一例として3階の反変テンソルのみを取り上げて以下の節 §2.6.2.4 でその概略を説明することにします。しかし，その前に準備の意味も込めて，対称性についての次の注意と**縮約**（または，縮重とも呼ばれます）の手続きについて説明しておくことにしましょう。

■注意　変換後も対称性は維持される。 例えば，T^{ij} がローレンツ変換を受けるとき，その対称部分 S^{ij} と反対称部分 A^{ij} とは互いに独立に変換を受け，それらが混じりあうことはありません。

$$T'^{ij} = L^i{}_k L^j{}_l \ \left(S^{kl} + A^{kl}\right) = S'^{ij} + A'^{ij}$$

ここで，S'^{ij} と A'^{ij} は，k, l がダミー添字であることに注意すると

$$S'^{ij} = L^i{}_k L^j{}_l S^{kl} = L^j{}_k L^i{}_l S^{kl} = S'^{ji},\ A'^{ij} = L^i{}_k L^j{}_l A^{kl} = -L^j{}_k L^i{}_l A^{kl} = -A'^{ji}$$

と書かれることから，変換後も前と同じ対称性を維持していることが分かります。

2.6.2.3 縮約

縮約（contraction）の操作は，基本的に，共変ベクトル B_i が対応する反変ベクトル B^i より，メトリック テンソル η_{ij} により $B_i = \eta_{ij}B^j$ として作られ，逆に，B^i が反変メトリック テンソル η^{ij} により $B^i = \eta^{ij}B_j$ として B_i から作られるという事実に加えて，反変ベクトル A^i と共変ベクトル B_i の対応する成分の積の和 A^iB_i が不変量であるという事実によっています。

例えば，3つの反変ベクトル A^i, B^i, C^i の積から作られた3階の反変テンソル $T^{ijk}(= A^iB^jC^k)$ からは，$T^{ijk}\eta_{ij} = (A_jB^j)C^k = T_j{}^{jk}(\equiv T_\bullet{}^{\bullet k})$, $T^{ijk}\eta_{ik} = A_kB^jC^k = T_k{}^{jk}(\equiv T_\bullet{}^{j\bullet})$, $T^{ijk}\eta_{jk} = A^iB_kC^k = T^i{}_k{}^k(\equiv T^i{}_\bullet{}^\bullet)$ と云う縮約の操作により2つ階数の減った3種類のベクトルが作られます。この例からも明らかなように，一般に，2階以上の任意のテンソルは一回の縮約の操作によって2つ階数の減ったテンソルになります。

2.6.2.4 既約分解

任意の反変，または共変テンソルは，変換によって互いに他と混じり合わない独立した成分の和として書くことができます。これは，変換に際して対称性は維持されるという性質を利用して成されます。その手順は既約分解と呼ばれています*49 。ここでは，一例として，ヤング (Young) 法による3階のテンソル T^{ijk} の既約分解について簡単に紹介することにします。

先ず，元の T^{ijk} からトレースがすべて0であるテンソル $T_0{}^{ijk}$ を作ります*50 。そのためには，$T_0{}^{ijk}$ が作れたと仮定して

$$T^{ijk} = T_0{}^{ijk} + \eta^{ij}A^k + \eta^{jk}B^j + \eta^{jk}C^i \tag{2.162}$$

と置き，未知の3個のベクトル A, B, C を，$T_0{}^{ijk}$ がトレースレスであるという条件

*49 既約分解の既約とは，素数分解における素数のような概念で，これ以上は分解できないことを意味しています。

*50 **トレース**（跡）とは，行列で言う“対角成分の和”に相当する操作で縮約と同じ操作を意味します。

により求めます。結果は，次のように成るでしょう。

$$A^i = \frac{1}{18}\left(5T^{\bullet}{}_{\bullet}{}^{i} - T^{\bullet i}{}_{\bullet} - T^{i\bullet}{}_{\bullet}\right) \tag{2.163}$$

$$B^i = \frac{1}{18}\left(-T^{\bullet}{}_{\bullet}{}^{i} + 5T^{\bullet i}{}_{\bullet} - T^{i\bullet}{}_{\bullet}\right) \tag{2.164}$$

$$C^i = \frac{1}{18}\left(-T^{\bullet}{}_{\bullet}{}^{i} - T^{\bullet i}{}_{\bullet} + 5T^{i\bullet}{}_{\bullet}\right) \tag{2.165}$$

次に，${T_0}^{ijk}$ のすべての成分を対称性に応じて分類します。先ず初めに完全対称部分 S^{ijk} と完全反対称な部分 A^{ijk} とを求めます。その方法は，先ず i, j, k のすべての配列についてそれらを添字にもつものを書き出し，S^{ijk} を求める場合は，それらすべてについて和を取り，A^{ijk} の場合は，それらの内で，偶数回の添字の入れ替えで ijk の並びに成るものについてはプラスを，奇数回で成るものについてはマイナスの符号を付けて和を取ります。

$$S^{ijk} = \frac{1}{3!}\left({T_0}^{ijk} + {T_0}^{jik} + {T_0}^{kji} + {T_0}^{ikj} + {T_0}^{jki} + {T_0}^{kij}\right), \tag{2.166}$$

$$A^{ijk} = \frac{1}{3!}\left({T_0}^{ijk} - {T_0}^{jik} - {T_0}^{kji} - {T_0}^{ikj} + {T_0}^{jki} + {T_0}^{kij}\right) \tag{2.167}$$

次に，残りの

$${T_0}^{ijk} - (S^{ijk} + A^{ijk}) = \frac{1}{3}\left(2{T_0}^{ijk} - {T_0}^{jki} - {T_0}^{kij}\right) \tag{2.168}$$

を次のルールに従って２つの既約なテンソルに分解します。

$$\begin{aligned} {C_1}^{ijk} &= \frac{1}{4}(e + (ij))(e - (ik)){T_0}^{ijk} \\ &= \frac{1}{4}\left({T_0}^{ijk} - {T_0}^{kji} + {T_0}^{jik} - {T_0}^{kij}\right) \end{aligned} \tag{2.169}$$

$$\begin{aligned} {C_2}^{ijk} &= \frac{1}{4}(e + (ik))(e - (ij)){T_0}^{ijk} \\ &= \frac{1}{4}\left({T_0}^{ijk} - {T_0}^{jik} + {T_0}^{kji} - {T_0}^{jki}\right) \end{aligned} \tag{2.170}$$

ここで，e は，恒等置換演算子，つまりすべての添字を自分自身に変換する演算子で，(ij) 等は ( ) 内の文字についての互換，つまり ( ) 内に示された２つの文字を互いに入れ替える操作を表す演算子です。

以上の手続きにより，${T_0}^{ijk}$ はつぎのように分解されます。

$${T_0}^{ijk} = S^{ijk} + A^{ijk} + \frac{4}{3}\left({C_1}^{ijk} + {C_2}^{ijk}\right) \tag{2.171}$$

■対称性を有する場合 元のテンソルが既にある対称性を持つ場合は，上述の手続きは少し簡単になります。例えば，上の例で T^{ijk} が，元々

$$T^{ijk} = -T^{ikj} \tag{2.172}$$

という反対称性を持っていたとすると，$T^{i\bullet}{}_{\bullet} = 0$, $T^{\bullet}{}_{\bullet}{}^{i} = -T^{\bullet i}{}_{\bullet}$ と成るため，

$$A^i = \frac{1}{3}T^{\bullet}{}_{\bullet}{}^{i}, \quad B^i = -\frac{1}{3}T^{\bullet}{}_{\bullet}{}^{i} = -A^i, \quad C^i = 0 \tag{2.173}$$

となります。また，T^{ijk} と ${T_0}^{ijk}$ とは同じ対称性をもつことに注意すると，${T_0}^{ijk}$ からは完全対称なものは作れないため直ちに $S^{ijk} = 0$ となることが分かります。そして，A^{ijk}, ${C_{1,2}}^{ijk}$ もそれぞれ簡単化されて

$$A^{ijk} = \frac{1}{3}\left({T_0}^{ijk} + {T_0}^{jki} + {T_0}^{kij}\right) \tag{2.174}$$

$${C_1}^{ijk} = \frac{1}{4}\left({T_0}^{ijk} + {T_0}^{jik}\right) \tag{2.175}$$

$${C_2}^{ijk} = -\frac{1}{4}\left({T_0}^{ikj} + {T_0}^{kij}\right) = -(jk){C_1}^{ijk} = -{C_1}^{ikj} \tag{2.176}$$

となるため，結局，この場合，元のテンソル T^{ijk} は

$$T^{ijk} = {T_0}^{ijk} + \frac{1}{3}\left(\eta^{ij}V^k - \eta^{ik}V^j\right) \tag{2.177}$$

$$= A^{ijk} + \frac{8}{3}{C_1}^{i[jk]} + \frac{2}{3}\eta^{i[j}V^{k]} \tag{2.178}$$

と既約分解されることが分かります。ここで，$V^i \equiv T^{\bullet}{}_{\bullet}{}^{i}$ と置いています。また，2つの添字を囲む [ ] は，それらの添字について反対称化することを意味しています。

$$X^{[jk]} \equiv \frac{1}{2}\left(X^{jk} - X^{kj}\right) \tag{2.179}$$

問 2.6.2.1 2階のテンソル F_{ij} は，次のように既約分解されることを示しなさい。

$$F_{ij} = {F^0}_{ij} + \frac{1}{4}\eta_{ij}F \tag{2.180}$$

ただし，F は $F \equiv F^{\bullet}{}_{\bullet}$ と置いたもので，${F^0}_{ij}$ は元の F_{ij} から作ったトレースレスのテンソルで次のように分解されます。

$${F^0}_{ij} = A_{ij} + S_{ij} \tag{2.181}$$

ここで,

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(F^0{}_{ij} - F^0{}_{ji}\right) \tag{2.182}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(F^0{}_{ij} + F^0_{ji}\right) \tag{2.183}$$

問 2.6.2.2　4 階の共変テンソル F_{ijmn} が，次の対称性を有するとします。

$$F_{ijmn} = -F_{jimn} = -F_{ijnm} \tag{2.184}$$

このテンソルは，以下のように分解されることを示しなさい。

$$F_{ijmn} = W_{ijmn} + \eta_{m[i}F_{j]n} - \eta_{n[i}F_{j]m} - \frac{1}{3}\eta_{i[m}\eta_{n]j}F \tag{2.185}$$

ここで，W_{ijmn} は F_{ijmn} と同じ対称性を持つトレースレスのテンソルで，F_{ij}，F は，それぞれ次のように定義したテンソルとスカラーです。

$$F_{ij} \equiv F^{\bullet}{}_{i\bullet j}, \qquad F \equiv F^{\bullet}{}_{\bullet} \tag{2.186}$$

問 2.6.2.3　前問で得たトレースレスのテンソル W_{ijmn} の既約分解が次のようになることを示しなさい。

$$W_{ijmn} = A_{ijmn} + \frac{2}{3}\left(2B_{ijmn} + B_{imjn}\right) + C_{ijmn} \tag{2.187}$$

ただし,

$$\begin{aligned} A_{ijmn} = \frac{1}{3!}(&W_{ijmn} + W_{imnj} + W_{injm} + W_{jmin} + W_{jnmi} \\ &+ W_{mnij}) \end{aligned} \tag{2.188}$$

$$B_{ijmn} = \frac{1}{4}\left(W_{ijmn} + W_{mjin} + W_{inmj} + W_{mnij}\right) \tag{2.189}$$

$$C_{ijmn} = \frac{1}{2}\left(W_{ijmn} - W_{mnij}\right) \tag{2.190}$$

2.6.3　テンソル方程式

ローレンツ変換の前後で同じ形に保たれているためには，方程式の両辺の各項は同じタイプのテンソルで書かれている必要があります。従って， 自然法則を記述する方程式は

$$\begin{aligned} A^{i\bullet}{}_{\bullet} &= V^i + C^{\bullet i}{}_{\bullet} \\ T^{i\bullet}{}_{j\bullet} + S^i{}_j &= J_{\bullet}{}^i{}_{j\bullet} \\ G^i{}_{jkm} &= H^i{}_{jpq}F^p{}_k K^{\bullet q}{}_{m\bullet} \end{aligned}$$

などのように書かれる必要があることが分かります。ただし，ここで導入した $A, C, \cdots$ 等の記号で表されたすべての量はすべてテンソルとします。

この節では，テンソル方程式の例として，先ず，ニュートンの運動方程式の自然な拡張としての4次元形式の運動方程式を導出し，それから前節で紹介した3次元形式の相対論的運動方程式 (2.135) が得られることを示した後で，マックスウェル方程式の4次元形式への書き換えについて考察することにしましょう。

2.6.3.1 4次元形式の運動方程式

力学の拡張としての相対論的運動方程式から始めましょう。先ず初めに，4次元的な速度，加速度を定義しますが，これらは，以下のように力学におけるものの自然な拡張として定義されます。

■4元速度 粒子に結び付けた時計の読み（粒子の固有時（間）と呼ばれます）は，宇宙にただ一つの量，つまり不変量です。これはしばしば τ という記号で表されます。今，これで粒子の4元位置ベクトル x^i を微分することによって，τ の不変性のために反変ベクトルの性質を備え，速度の次元を持った3次元の速度の自然な拡張としての**4元速度**が定義されます。

$$u^i \equiv \frac{dx^i}{d\tau} \tag{2.191}$$

慣性系 K の観測者から見た時刻 t の瞬間の粒子の速度を $\vec{v}$ とすると，次の瞬間の dt 秒後まではこの速度で近似できるために，この間の粒子の固有時間 $d\tau$ は，(2.79) により

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}\, dt \tag{2.192}$$

と書かれます。従って，このとき，(2.191) は，次のように書き下されることが分かります。

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}, \qquad u^\alpha = \frac{v_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \tag{2.193}$$

ここで，v_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ は，それぞれ $\vec{v}$ の x, y, z 成分を表したものです。

■4元加速度　4 元速度 u^i を更に τ で微分した

$$w^i \equiv \frac{du^i}{d\tau} \tag{2.194}$$

も反変 4 元ベクトルの性質を維持していて，加速度の次元を持つた量です。これは**4元加速度**として定義されています。今，(2.193) と，$d\tau$ と dt の間の関係を用いて，4 元加速度 w^i を座標時間 t と速度 $\vec{v}$ を用いて表すと次のようになることが容易に分かるでしょう。

$$w^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\right), \quad w^\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{v_\alpha}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\right) \tag{2.195}$$

2.6.3.2　運動方程式

ニュートンの運動方程式は，ベクトル方程式であるため，この方程式の自然な拡張としては直ちに

$$m_0\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = F^i \tag{2.196}$$

が考えられます。このとき，粒子の質量に関係する定数 m_0 は不変量でなければならないため，粒子の静止系での質量である静止質量を用いる必要があることは明らかでしょう。

(2.196) 式は，4 元加速度の式 (2.195) を用いると

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = F^0 \tag{2.197}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0v_\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = F^\alpha \tag{2.198}$$

と時間成分と空間成分に分けて書くことができます。そして，これらの式のニュートン近似が，それぞれ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_0v^2\right) = cF^0 \tag{2.199}$$

$$\frac{d\ m_0v_\alpha}{dt} = F^\alpha \tag{2.200}$$

となることから，(2.198) は，ニュートンの運動方程式に代わる相対論的運動方程式と認識されます。また，(2.199) より，4 元力 $F^i = (F^0,\ F^\alpha)$ の第 0 成分は，粒子に成された仕事に関係する量であることが分かります。

ところで，空間成分 F^α に対応する量は，例えば，直線運動の場合について (2.198) と (2.135) とを比較することにより実際に粒子に働く力 $\vec{f}$ と

$$F^\alpha = \frac{f_\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.201}$$

なる関係にあることが分かります。これにより，一般の運動の場合についても (2.135) が成り立つと結論されます。

■ 4 元運動量　運動方程式 (2.196) は，普通の運動量に習って定義した 4 元運動量

$$p^i = m_0u^i \tag{2.202}$$

を用いると

$$\frac{d\ p^i}{d\tau} = F^i \tag{2.203}$$

と，力学の場合と同じ形にも書かれます。

ところで，p^i の実体は，4 元速度の式 (2.193) を用いて

$$p^0 = \frac{m_0c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad p^\alpha = \frac{m_0v_\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.204}$$

と書くと，これらは，それぞれ (2.140) で定義した相対論的エネルギー E と (2.136) で定義した相対論的運動量 $\vec{p}$ に対応していることが分かります。そして，これらを用いると

$$p^i = (\frac{E}{c},\ \vec{p}) \tag{2.205}$$

と書かれ，従ってこれに対応する共変量は $p_i = (\frac{E}{c},\ -\vec{p})$ と書かれることから，この大きさの 2 乗 p^ip_i は，

$$p^ip_i = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = {m_0}^2c^2 \tag{2.206}$$

となることが分かります。因みに，この式は同時に4元速度の2乗 $u^i u_i$ が c^2 であることを示していることにも注意しましょう。

$$p^i p_i = m_0 u^i m_0 u_i = {m_0}^2 c^2 \Longrightarrow u^i u_i = c^2 \tag{2.207}$$

2.6.4 マックスウェル方程式

節 §2.1.2 で見たように，電磁波としての光の存在を許すマックスウェル方程式は，始めから相対論の要請を満たしていますが，その形式は3次元のベクトル形式であるため，時間の変換も同時に行うローレンツ変換の下ではその形を維持することはできません。そのため4次元形式に書き改める必要があります。この節では，4元力 F^i の第0成分の1例としてローレンツ力を取り上げると共に，その手順について説明することにしましょう。

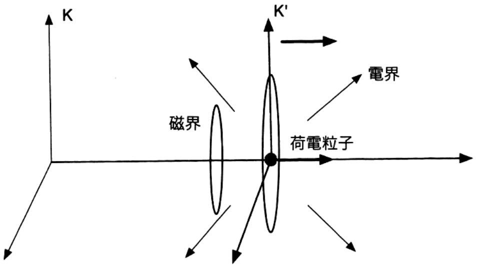


図 2.26 荷電粒子の静止系 K' では電界のみ，その他の系 (K) では電界も磁界も存在する。このことから電界と磁界とはある1つの実体の2つの側面と結論される。

■電磁場テンソル 先ず，『電界と磁界は，独立した存在ではなく一つの実体の2つの側面と見るべきである』ことに注意しましょう。

このことを知るためには，帯電した1個の粒子を静止した系から見ると電界しか存在しませんが，この系に対して運動している他の系から見ると，電荷は運動している，つまり電流が流れているため磁界も存在するという簡単な事実に注目すれば十分でしょう。図 2.26 はこの様子を示したものです。

実際のところ，電界 $\vec{E}$ と磁束密度 $\vec{B}$ とは，次の**電磁場テンソル**と呼ばれている2階の反対称テンソルの成分にまとめられます。

$$F^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{2.208}$$

電磁場テンソル内での電界 $\vec{E}$ と磁束密度 $\vec{B}$ の各成分の配置は，**空間反転**（時間軸はそのままですべての空間軸を反転させること）させたときのこれらの量の振る舞いの相違により決まります。つまり，電界はいわゆる極性ベクトルなのでこの変換の下で符号を変えるため F^{01} 等の様に添字の一つが 0（時間）となる位置に，他方，磁束密度は軸性ベクトル*51であり符号を変えないため，F^{12} 等の様に両方の添字が 0 を含まない位置に配置されます。更に，配置する順序は，例えば，x, y, z を 1,2,3 として 1,2,3 の循環的な入れ替えに成るように，つまり $F^{12} = B_z$，$F^{23} = B_x$，$F^{31} = B_y$ のように配置します*52 。

最後に，(2.208) の逆の関係，つまり電界 E_α と磁束密度 B_α は，電磁場テンソル F^{ij} によって次のように表されることに注意しましょう。

$$\vec{E} = (E_\alpha) = (cF^{0\alpha}), \quad \vec{B} = (B_\alpha) = \left(\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}F^{\beta\gamma}\right) \tag{2.209}$$

添字 β，γ はもちろんダミー添字で，和を取る範囲は何れも 1 から 3 までです。また，$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ は，3 次元のレビ-チビタ (Levi-Civita) 記号と呼ばれ，添字 α，β，γ が取る $1, 2, 3$ の並びが，その偶数回の入れ替えで 1,2,3 の順に成るときは +1，奇数回の入れ替えで成るときには，-1 の値を，また同じ数字が 2 度以上現れるときは 0 の値を取るという量です。例えば，$\epsilon_{123} = +1$，$\epsilon_{213} = -1$，$\epsilon_{121} = 0$ です。

2.6.4.1 マックスウェル方程式

(2.209) を用いて電界（$\vec{E}$）と磁束密度（$\vec{B}$）を電磁場テンソル F^{ij} へ変換して，3 次元ベクトル形式で表されたマックスウェル方程式 (2.1),(2.2) を，2 組の 4 元テンソル方程式へと書き直しましょう。

---

*51 我々の馴染みの 3 次元ユークリッド空間において，空間反転によって符号を変える普通のベクトルが**極性ベクトル**で，**軸性ベクトル**は，力のモーメントや角運動量などのように 2 つの極性ベクトルの外積から作られるベクトルに対応します。磁界が軸性ベクトルで表されることは，定常電流がその周りに作る磁界を計算するときに用いるビオ・サバールの公式を思い起こせば十分でしょう。

*52 この配置のルールは，もう少し数学的に言えば，磁束密度 $\vec{B}$ が，反対称テンソル F^{ij} の空間部分 $F^{\alpha\beta}$ にデュアル（dual）であるため $B_\alpha = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}F^{\beta\gamma}$ と書かれることから来ています。詳しくは，後の節 §3.5.3.1 や参考文献 [1] を参照して下さい。

■第1組　先ず，ベクトル解析から必要な情報をまとめておきます。

(1) ベクトル場 $\vec{A}$ の発散：div $\vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = A_{\alpha,\alpha}$
(2) ベクトル場 $\vec{A}$ の回転：rot $\vec{A} = \nabla \times \vec{A}$,　$(\mathrm{rot}\vec{A})_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_{\gamma,\beta}$

上式の α と下式の β, γ はそれぞれダミー添字であること，コンマ (,) は普通の微分を表していることに注意して下さい。

(1),(2) を用いると，第1組は直ちに次のように書かれることが分かります。

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \Longrightarrow B_{\alpha,\alpha} = 0 \tag{2.210}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ の}\alpha\text{成分} \Longrightarrow \epsilon_{\alpha\beta\gamma} E_{\gamma,\beta} = -cB_{\alpha,0} \tag{2.211}$$

添字0は $x^0 = ct$ を指しています。

次に，これらの式に (2.209) を用いて，F_{ij} の式へと書き直します[*53]。その際，レビ・チビタの記号 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ とクロネッカー δ との間に成り立つ次の関係

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\mu\nu\gamma} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} \tag{2.212}$$

を用いることは効率的かも知れません。結果は，次のように成るでしょう。

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma,\alpha} = 0 \Longrightarrow F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0 \tag{2.213}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}(F_{0\beta,\gamma} + F_{\gamma 0,\beta} + F_{\beta\gamma,0} = 0) \Longrightarrow F_{0\beta,\gamma} + F_{\gamma 0,\beta} + F_{\beta\gamma,0} = 0 \tag{2.214}$$

最後に，これら2式をまとめれば求めるテンソル方程式となります。

$$F_{ij,k} + F_{jk,i} + F_{ki,j} = 0 \tag{2.215}$$

この式は，添字 i, j, k が何れも0から3までの値を取るため，沢山の成分を持つように見えますが，式全体で見るとこれらの添字について完全反対称，つまりどの2つの添字の入れ替えに対しても符号を変えるため，独立なものは ${}_4C_3 = 4$ 個しかないことが分かります。更に，これら4個の式は，6個の独立な F_{ij} の成分の間の関係を与えるため，成分についての方程式として見た場合には，3個のみが独立であることが確かめられるでしょう。

[*53] 電磁場テンソルの共変版 F_{ij} は $\eta_{ik}\eta_{j\ell}F^{k\ell}$ として反変版 (2.208) から得られます。

■第2組 引き続いて第2組を考えましょう。

先ず，3次元のベクトル形式を成分表示します。

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho \Longrightarrow D_{\alpha,\alpha} = \rho \tag{2.216}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \text{ の}\alpha\text{成分} \Longrightarrow \epsilon_{\alpha\beta\gamma}H_{\gamma,\beta} = cD_{\alpha,0} + j_\alpha \tag{2.217}$$

次に，$\vec{D}$, $\vec{H}$ の組みに対して，(2.209) と同じような2階の反対称テンソル F^{*ij} を導入します：

$$\vec{D} = (D_\alpha) = (\frac{1}{c}F^{*0\alpha}), \quad \vec{H} = (H_\alpha) = \left(\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}F^{*\beta\gamma}\right) \tag{2.218}$$

そして，第1組の場合と同様の手順を踏むと次の結果に到達できるでしょう。

$$F^{*0\alpha}{}_{,\alpha} = c\rho, \tag{2.219}$$

$$F^{*\alpha 0}{}_{,0} + F^{*\alpha\beta}{}_{,\beta} = j_\alpha \tag{2.220}$$

最後に，**4元電流密度**を

$$j^i = (c\rho,\ j_\alpha) \tag{2.221}$$

と定義すると，上記2式は次の統一された一つの式で表されることが分かります。

$$F^{*ij}{}_{,j} = j^i \tag{2.222}$$

■真空中 上に見たように，一般的な場合は，第1組と第2組で異なる2種類の電磁場テンソルを導入する必要がありました。しかし，ここで説明する真空中や，均一で時間的にも変動しない媒質中に限れば電束密度 $\vec{D}$ と電界 $\vec{E}$, 磁束密度 $\vec{B}$ と磁界 $\vec{H}$ とは互いに比例関係にあるため，実質的に F^{ij} のみを扱えば良いことが分かります。特に，真空中に限った場合には，$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ の関係があるため F^{*ij} は，F^{ij} により $F^{*ij} = \frac{1}{\mu_0}F^{ij}$ と表されます。このため，第2組は次のようになることが分かります。

$$F^{ij}{}_{,j} = \mu_0 j^i \tag{2.223}$$

2.6.5　4元力としてのローレンツ力

"力"と云う概念は，相対論でもニュートン力学でも，"速度変化を引き起こすすべての実体"として総括できますが，ニュートン力学では，万有引力からも分かるように，直接物体に作用する近接的な力というより，遠隔的な力（空間を隔てて直接かつ一瞬にして働く力）を前提にしているように見えます。そして，この前提は，力が伝わる速さを暗黙裏に無限と仮定していることに通じます。それ故，最高速の存在を前提とする相対論では，このような遠隔作用を前提とする力の概念それ自体を変更しなければならないことが分かります。そして，この要請に従って，ニュートンの万有引力に基づく重力の概念を修正することから相対論的重力理論（一般相対論）が生まれたわけです。

一方，電磁気学で扱う静電気力やローレンツ力は，荷電粒子が各瞬間に居る場所で，そこに存在する電界や磁界から直接力を受けるため相対論に矛盾しません。しかしながらそれらの力は，通常，3次元ベクトル形式で表現されるため，マックスウェル方程式と同様にその表現形式を4次元形式に拡張する必要があります。

具体的に進めましょう。電荷 q をもつ荷電粒子が，電界・磁界 $(\vec{E}, \vec{B})$ から受けるローレンツ力[*54]

$$\vec{f} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \tag{2.224}$$

を4元力として拡張することにしましょう。

先ず，この式の α 成分が次のように書かれることに注意します。

$$f_\alpha = qE_\alpha + q\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, v_\beta B_\gamma$$

ここで，もちろん β, γ はダミー添字です。次に，この式に (2.209) を代入して，(2.212) を用いて書き直します。これにより

$$f_\alpha = cqF^{0\alpha} + qv_\mu F^{\alpha\mu}$$

が得られます。更に，この右辺を (2.193) から得られる共変4元速度 $u_i = \gamma(c,\ -v_\alpha)$ を用いて書くと

$$f_\alpha = \frac{q}{\gamma} u_i F^{i\alpha} \tag{2.225}$$

とまとめられることが分かります。

[*54] 厳密には，これは静電気力とローレンツ力の和ですが，本書では以後ローレンツ力と呼ぶことにします。

この式と (2.201) とから，形式的にはただ α を i にするだけで 4 元力 F^i が得られます。

$$f^i = \frac{q}{\gamma} u^j F_j{}^i \Longrightarrow F^i = q u_j F^{ji} \tag{2.226}$$

この 4 元力 F^i を用いると，電磁場中での荷電粒子の運動方程式は，次の 4 次元形式へと自然な形で拡張されます。

$$\frac{dp^i}{d\tau} = q u_j F^{ji} \tag{2.227}$$

しかしながら，この第 0 成分については，3 次元形式の中に直接該当するものを見つけることができません。この問題については，節を改めて考察することにしましょう。

2.6.6　運動方程式の第 0 成分

電磁的な 4 元力 (2.226) の第 0 成分から，一般の 4 元力の第 0 成分についての具体的な情報が得られます。そのために (2.227) の第 0 成分を，速度ベクトル $\vec{v}$ と $\vec{E}$, $\vec{B}$ を用いて書き直します。

$$\frac{dW}{dt} = q\vec{v} \cdot \vec{E} \tag{2.228}$$

左辺の W は，4 元運動量 (2.205) の第 0 成分から得られたエネルギーですが，静止エネルギーを差し引いた粒子の運動エネルギーとも言えます。一方，右辺は，$q\vec{E}$ が荷電粒子に働く静電気力ですが，これと速度 $\vec{v}$ との内積 $q\vec{E} \cdot \vec{v}$ は，$q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}$ に等しいため，電磁的な力が 1 秒間の間に荷電粒子に対して成した仕事（仕事率）に等しいことが分かります。

以上により，4 次元形式の運動方程式では，外力の成した仕事が，エネルギーの増加に等しいというエネルギー保存の関係が，第 0 成分という形で運動方程式の中に含まれていることが分かります。

第3章

一般相対論入門

はじめに

これまでに，シミュレーション実験やニュートン理論を通じて，ケプラーによって見出されていた惑星の運動に関する3法則や，ガリレイやニュートンに依る落体の法則や放物体についての法則は，すべて『物質間には，それらの質量の積に比例し，その間の距離の2乗に逆比例する引力が働いている』とする“万有引力”を想定して，重力質量と慣性質量とが等しいと仮定すればすべて説明できることを見て来ました。

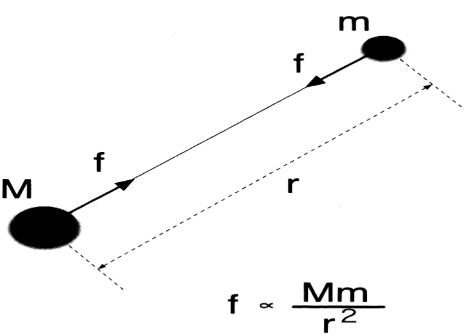


図3.1 **万有引力**は空間を飛び越して一瞬で働く力であるため，相対論と矛盾する。相対論を考慮すると，実在としての『重力場』の存在へと導かれる。

しかしながら，万有引力の法則には，次のような問題があります。

(a) 空間を飛び越して物質に直接働く力とはどのような力か。

(b) 物質の一方に起こった変化は，瞬時に他方に伝わるのか。

特に，(b) について，時間の絶対性とガリレイの相対性原理とを基礎に置く力学では，力は一瞬で伝わる必要がありますが，これは最大の速さが光速としている特殊相対論とは明らかに矛盾します。この節では，これらの点を修正して特殊相対論と相容れる重力理論を作るためにアインシュタインが考えたアイディアについて考えて行くことにしましょう。

3.1　等価原理

アインシュタインは，この節で説明する**『等価原理』**と，後に扱う**『一般共変性』**とを指導原理として新しい重力理論を構築しましたが，その内でも等価原理は重力の本質（正体）に関わる重要な役割を演じています[*1]。しかしながら，等価原理は，実験的な検証を受ける必要がある“大いなる仮定”でもあります。一般相対論以降は，その仮定する内容に応じて3種類（弱い等価原理，アインシュタインの等価原理，強い等価原理）に細分化されて個々に実験的な検証が行われています。

一時，第5の力とかで騒がれたように，将来より精密な測定が可能になれば，或いはこの原理に基づく理論の修正（拡張）が必要になるかもしれませんが，現在のところ何れの等価原理も非常に高い精度で成り立っていることが報告されています。

3.1.1　弱い等価原理

弱い等価原理 WEP(**W**eak **E**quivalence **P**rinciple) とは，ニュートンが仮定した等価原理のことで，以下に記述する慣性質量と重力質量との同等性を指します。

■慣性質量　慣性質量 m_i は，働いた力に比例して物体は速度変化を起こすというニュートンの運動の第2法則（運動方程式）で比例定数として導入された物質に依存する定数で，物体のいわゆる「慣性」，つまり動き難さを表す量と云えます。

$$\frac{F}{a} = m_i \Longrightarrow F = m_i a \tag{3.1}$$

*1 **一般共変性**は，簡単に云えば，特殊相対論が，慣性系の間での変換，つまりローレンツ変換に対してのみ“共変”であったのに対して，任意の基準系の間での座標変換に対しても“共変”であるように要求するというものです。また，新しい重力理論が，一般相対論と呼ばれる所以は，この一般共変性の要請のためにその記述形式が，慣性系に特化した特殊相対論を含むように一般化されたものであることによると言えるでしょう。

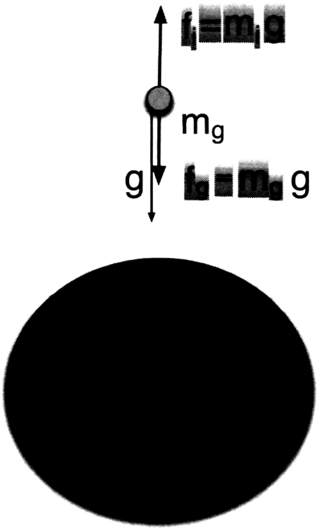


図 3.2　慣性質量 m_i と重力質量 m_g とが等しいと慣性力 f_i と重力 f_g がつり合って物体は無重力になる。

■重力質量　重力質量 m_g は，「万有引力の源となる質量」として導入された物質に固有の量で，その起源から言えば慣性質量との間に関係性は何もありません。

重力質量は普通，秤を用いて測る量として認識されています。万有引力の法則によると，地球（全質量 M_g，半径 R の球対称な質量分布の球とします）の中心から $R+h$ の，地表近くの位置に重力質量 m_g の物体を置いたとき，この物体が受ける力の大きさ F_G は，地球の全質量が中心に集まっている場合と同じで

$$F_G = \frac{GMm_g}{(R+h)^2} \tag{3.2}$$

と成ります。そしてこれは，$\frac{h}{R} \ll 1$ であることに注意すると

$$F_G \cong \frac{GM}{R^2} m_g \equiv m_g g \tag{3.3}$$

と近似できることが分かります。ここで

$$\frac{GM}{R^2} \equiv g \tag{3.4}$$

が，重力加速度の大きさとして知られる量の理論値（理想値）です。しかしながら，実際の振り子の実験等で測定される g の値には，局地的な地球の質量分布の不均一さや地球の公転・自転に依る慣性力の効果なども含まれます。従って，厳密には，(3.4) にこれらの効果が加わったものが，測定地点における重力加速度の大きさです。故に，厳密な測定では，これらの効果を補正する必要がありますが，現実的にはこれらの影響は殆ど無視できるため，地表にある物体の重力質量 m_g は，力 F_G を物体の重さとして秤で計って

$$m_g = \frac{F_G}{g} \tag{3.5}$$

として知ることができます。

3.1.2 実験による検証

上に見たように慣性質量と重力質量とが等しいという根拠はどこにもありません。従って，これは実験によってのみ検証されるべきものです。

この検証へ向けての実験は，ニュートン (1686) 自身に依る振り子を用いた実験から，これまでに多くの人々によりこの種の実験が成されて来ましたが，それらの中でも，エトヴェシュの実験[*2] として知られるものがその方法と 5×10^{-9} という精度の高さからも有名です。しかし，この概略を説明する前に，先ず，$m_i \neq m_g$ と仮定して

> **落体の法則：**同じ高さ h の塔から自由落下させた物体が，その種類に関係なく同時刻に地上に落下するという経験則

を力学で説明することを考えてみましょう。

このときの物体の運動方程式は，地表から垂直上向きに y 軸をとると，$m_i \frac{d^2y}{dt^2} = -m_g g$ となります。従って，これを積分すると，時刻 t でのその速さと位置は，それぞれ $v = \frac{m_g}{m_i} gt$ と $y = h - \frac{1}{2}\frac{m_g}{m_i} gt^2$ と結論されます。従って，問題の経験則が成り立つためには，比 $\frac{m_g}{m_i}$ が物体の種類に依存しないことが必要です。もしこれが確認されれば，m_i と m_g とは独立に定義された量であるため，これらを測る単位を調整することに依って常に $\frac{m_g}{m_i} = 1$ とすることができます。従って，このことをより精度の高い実験に依って再確認すれば良いことが分かります。

[*2] R.v. Eötvös, D.Pekár und E.Fekete, Ann. Phys. **68**(1922) 11

■エトヴェシュ (Eötvös) の実験の概略　地上の物体は，重力質量による重力と，地球の公転・自転による慣性力の両方の合力を受けています。もし，重力質量と慣性質量とが異なるなら，物質に依ってこれらの合力に差があるでしょう。実験は，この差を検出するために，棒を糸で水平に吊るし，その一端 A に Cu, H_2O や Al と Mg との合金等を，他端 B には A と同じ重さの Pt を取り付けて，先ず東西に向け，次に 180° 回転して，それらの測定における糸のねじれの差を検出するという方法で行われました。結果は，次の $\eta(A,B)$ の値で示され，$|\eta(A,B)| < 1 \times 10^{-8}$ と云う結果が得られたということです[*3]。

$$\eta(A,B) = 2\frac{\left(\frac{m_g}{m_i}\right)_A - \left(\frac{m_g}{m_i}\right)_B}{\left(\frac{m_g}{m_i}\right)_A + \left(\frac{m_g}{m_i}\right)_B} \tag{3.6}$$

3.1.3　アインシュタインの等価原理

一定の加速度の大きさ g で落下している，つまり地表近くで自由落下しているエレベータを考えましょう。このとき，エレベータに乗っている人には

(1) 下向きに $m_g g$ の大きさの重力と
(2) 上向きに $m_i g$ の大きさの慣性力と
(3) エレベータの床からの垂直抗力

が働いています。

もし，弱い等価原理

慣性質量 m_i と重力質量 m_g とは正確に等しい。

が成り立つとすると，エレベータに乗っている人に働く垂直抗力は

$$\text{垂直抗力} = (m_g - m_i)g = 0 \tag{3.7}$$

となり，エレベータに乗っている人たちは無重力状態を体験することになります。

アインシュタインは，この事実を受け入れ，与えられた重力場の中でこのエレベータのような自由落下している基準系に移れば，重力も，部分的には完全に消し去ることができる「**見かけの力**」であると見なしました。

---

*3 詳しくは，参考文献 [10]，または前節 §3.1.2 の脚注に挙げた文献を直接参照して下さい。因に，現在ではより高い精度 ($\sim 10^{-12}$) での確認も行われているようです。

ところで，自由落下している基準系，いわゆる**自由落下系**内にある物体は，外から見ると基準系と共に加速度運動をしているため，時々刻々と速度を変えています。弱い等価原理を認めるとこの系内では，無重力状態であるため，この系は一種の慣性系と見なせます。しかしもちろん，この“慣性系”は1つではなく落下速度の変化に伴って無数に存在します。それ故，この系は，しばしば**局所慣性系**と呼ばれています。

アインシュタインは，このような局所慣性系も慣性系の中に含めて，特殊相対論の基本原理の一つであるアインシュタインの相対性原理：『すべての慣性系においてすべての物理法則は同じである』を拡張して一般相対論を構築するための指導原理の一つとしました。

参考（遠心力とコリオリの力） 速度が時々刻々と変化する電車や自転する地球など加速度運動をしている乗り物（以後，**加速度系**と云います）では，遠心力やコリオリの力などといった「見かけの力」を“体験します”[*4]。この「見かけ」とは，加速度系などの特別な基準系に於てのみ現われ，他の基準系から見れば存在しないことを意味しています。

以下の図は，遠心力とコリオリの力について説明したものです。角速度 $\vec{\Omega}$ で回転している基準系に置かれた質量 m の物体に働く遠心力は，物体を中心から外向きに排除するように働いていて，公式では

$$m\vec{\Omega} \times (\vec{r} \times \vec{\Omega}) \tag{3.8}$$

と書かれます。ここで，$\vec{r}$ は物体の位置ベクトルで，遠心力は $\vec{r}$ に平行であることが分かります。

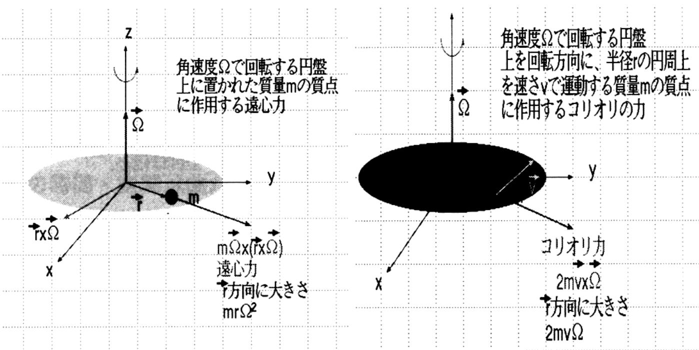


図 3.3 **遠心力とコリオリの力**

一方，コリオリの力は，速度 $\vec{v}$ で運動している物体に対してのみ働き，公式では

$$2m\vec{v} \times \vec{\Omega} \tag{3.9}$$

[*4] ニュートン力学では，見かけの力はすべて物体の慣性，つまり物体は力が働かなければ静止しているものはいつまでも静止し，等速直線運動をしているものはそれを続けるという性質，に由来するものとして，慣性力の範疇に入ります。

と書かれます。図のような回転円盤上では，自明なことですが，円盤の回転方向と反対方向に $v = r\Omega$ の速さで回転運動をすれば，この力により遠心力の影響を帳消しにできることが分かります。

3.2　時空の曲りとしての重力

前節で述べた通り，アインシュタインの重力理論は等価原理を積極的に用いて作られた理論であると言えます。

この原理と特殊相対論から得られた重要な2つの帰結

[1] 運動する時計は遅れる。

[2] 運動する物差しは縮む。

を用いると，直ちに『重力が時間・空間の曲りに依る効果である』という構図が見えて来ます。この節ではこれについて簡単に見ることにしましょう。

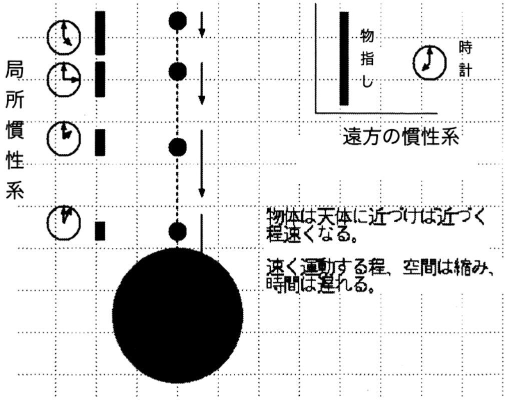


図 3.4　**局所慣性系の時間と空間**　重力源に近い系ほど時間はゆっくり進むようになり，空間は縮んで行く。

図 3.4 は，ある重力天体に自由落下して行く物体と，これに結び付けた基準系（自由落下系＝局所慣性系）の様子を示したものです。自由落下系は，他の基準系（特に，遠方の慣性系）の観測者から見るともちろん加速度系ですが，これは異なる速度のたくさんの“局所慣性系の集まり”に分解して考えることができます。そして，これらの局所慣性系の速度は，天体に近い程速いため各系の時間と空間は，特殊相対論によ

り天体に近い系ほどゆっくりと進み，また縮んでいることが分かります。ところで，このような局所慣性系の存在自体が重力に起因していることは言うまでもないでしょう。この事実に，等価原理によるその各局所慣性系内では無重力という事実を考え合わせると，『重力天体の周りには，重力によって縮んだり遅れたりしている時空が広がっている』という図式が見えて来ます。一般相対論は，この

重力= 時空の曲がり

のアイディアを，『リーマン幾何学』という数学的な道具を用いて表現したものと言えます。

3.3　加速度系の時空

一般相対論についての説明に入る前に，加速度系の時空について，簡単に触れておくことにしましょう。

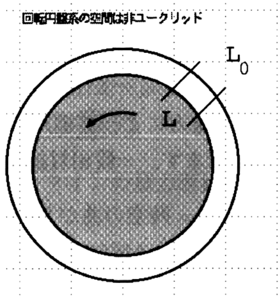
特殊相対論で扱う時空は，ミンコフスキー空間でした。これは一般的な時空のなかでは，平坦時空と呼ばれています。その理由は，時間はどの瞬間も区別無く同等で，場所に関係なく一様に流れ，空間も均一で，どの方向も場所に依らず特別な方向を持たないことが約束された時空であるためです。

前節で，等価原理を用いると『重力＝見かけの力=加速度』と結論され，更に『重力＝時空の曲り』という結論が得られることを見ました。この節では，これら両者を合わせた『加速度＝時空の曲がり』という結論に注目しましょう。これを認めると，**『加速度系の時間・空間は曲がっている』**ことになります。ただ，この場合，次のような疑問が生じます。

『実際の重力による時空の曲がりと加速度系にいることによる「曲がり」とをどのように区別するのだろうか？』

実のところ，アインシュタインの重力理論である一般相対論では，この両者を少なくとも定式化においては区別せず，物理的な要請として，物体から遠く離れても重力が存在するのはおかしいので，これは加速度運動している基準系から見ているための「見掛け上の重力」であると考えるわけです*5。

*5 もちろん，数学的には，見掛け上曲がっているように見えても，リーマンテンソルという曲がりを表す量を計算してみれば平坦か否かは直ちに分かります。



加速度系の空間が曲がっていることを示す例として，次の図のような回転円盤に固定された回転基準系を考えて見ましょう[*6]。

図のように，回転円盤の周に沿って円盤のすぐ外に並べて置いた物差しと円盤の周に沿って並べて置いた物差しの長さ比べをしましょう。

L_0 を外に置いた物差しの一部とすると，特殊相対論からの帰結「運動する物体は縮む（ローレンツ収縮する）」をこれに適用すると，円盤上の対応する物差しの長さ L は

$$L = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, L_0$$

と縮んでいます。v はもちろん円盤の外周の回転の速さです。ここで，特殊相対論の場合と違ってこの縮みは相対的ではないことに注意して下さい。この場合，運動しているのは明らかに円盤の方で，慣性系間の場合のように互いに相手を見れば同じ速さで運動しているという関係ではありません。従って，この場合，縮んでいるのは円盤上の物差しで外の物差しが同じように縮んでいるとは言えません。このため円盤上の観測者が直ぐ外の物差しを見れば大きく見えます。

一方，円盤の直径方向に沿って置いた物差しについては，運動方向と垂直であるためローレンツ収縮を受けません。従って，どちらの観測者から見ても同じ長さです。

以上のことを考慮すると，円盤上の観測者が，自分の物差しを使って外に描かれた円の円周率を求めると，周囲の長さは $L_0\gamma \times n$（ここで，$n = \frac{\text{外側の円の周の長さ}}{L_0}$）であるため

$$\text{円周率} = \frac{L_0\gamma \times n}{\text{直径}} = \gamma\pi$$

となります[*7]。これは $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > 1$ であるため，我々が馴染んでいるユークリッ

---

*6 この例は，アインシュタインが日本で講演を行ったときの講演録の中にあります。

*7 回転円盤基準系から外で起こっているいろいろな物理現象を観測したらどのように見えるかが問題

ド空間での値 π より大きいことが分かります。故に，回転系の時空は，ユークリッド空間でないことが結論されます。

ところで，上の議論では時間については無視しましたが，一般に，加速度系ではもはやミンコフスキーダイアグラムによる記述はできないこと，つまり加速度系で扱う時空は，空間をユークリッドとして扱うミンコフスキー空間ではないことは明らかでしょう。

3.4　数学的準備

この節では，『重力＝加速度＝時空の曲がり』の図式を，統一して表現するための数学的な道具としての（擬）リーマン幾何学について説明します。これは後の節でのアインシュタインが辿り着いた方程式の説明の準備となるでしょう。

3.4.1　平坦空間の幾何学

先ず，イメージの把握を目的として，背景が２次元のユークリッド空間の場合における直交座標系と斜交座標系，および曲線座標系の代表格としての極座標系を採用したときの反変ベクトルと共変ベクトルの相違について見ることにしましょう。

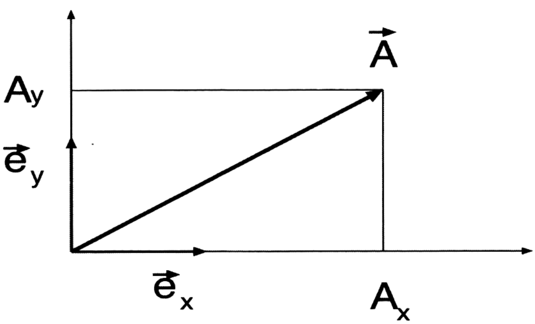


図 3.5　２次元ユークリッド空間における直交座標

なので，このような設定にしています。

■ベクトルの成分表示　図 3.4.1 のような直交座標系を導入すると，任意のベクトル $\vec{A}$ は

$$\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y$$

と書かれます。これは 2 つの基本単位ベクトル $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ が “暗黙のうち” に仮定されているとすれば，**順序付けられた 2 つの数の組**

$$\vec{A} = (A_x,\ A_y)$$

として表現されます。

しかし，これら 2 つの数の組が，直ちに 2 次元ベクトル $\vec{A}$ と考えることはできません。なぜなら，ベクトル $\vec{A}$ は座標変換とは無縁の幾何学的な実体であるのに対して，成分 $(A_x,\ A_y)$ の方は，一般に変更を受けてまったく異なる数の組みになってしまうことから明らかでしょう。

こうして，成分の組みとしてベクトルを考える場合には，どのような座標系への変換に際してもその変換性がきっちりと定義された数の組みでなければならないことを認識しておく必要があります。

3.4.2　直交系から斜交座標系へ

本来ユークリッド空間では，反・共変の 2 種類のベクトルの概念を導入する必要はありませんが，座標系を直交座標系から他へ変えると成分表示のベクトルとしては，その必要性が生じて来ます。一例として，2 つの座標直線が角度 θ で交わる図 3.6 のような斜交座標系を考えることにしましょう。

2 次元ユークリッド空間内の任意のある点の位置が，直交，斜交の 2 つの座標系でそれぞれ (x, y)，(x', y') とすると，図 3.6 よりこれらの間には次の関係があることが分かります。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

あるいは，逆に

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\theta} \begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

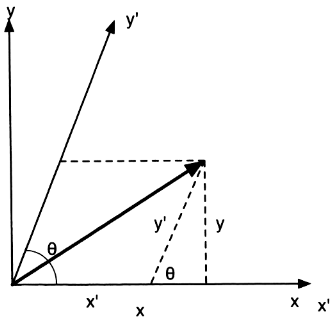


図 3.6 斜交座標系

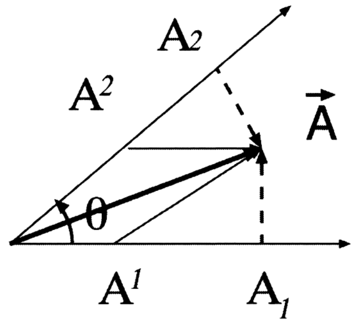


図 3.7 斜交座標系における反変ベクトルと共変ベクトル

3.4.3 斜交系の幾何学

直交座標系から斜交座標系への位置ベクトルの変換は (3.11) によって与えられます。従って，今の場合，反変ベクトルの定義を，節 §2.2.7 や，節 §2.2.6.1 で採用した回転やローレンツ変換などによる“直交系”同士の間での変換に依る定義から，座標変換に際して (3.11) のように『位置ベクトルと同じ変換をする数の組み』としての定義へ拡張する必要があります。

$$\begin{pmatrix} A^{1'} \\ A^{2'} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\theta}\begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

一方，共変ベクトルは，今の場合は直交系で x^2+y^2 が不変量であることに注目することによって求められます。

先ず，(3.10) とこの転置した行列との積から次の関係を導きます。

$$x^2+y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x'\ y')\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

この式の右辺も不変量であることと，

$$x'^i = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

が位置ベクトルの斜交系での成分であることに注意すると，

$$x_{i'} = g_{ij}\ x^{j'} \tag{3.14}$$

が斜交系での**共変位置ベクトル**の成分であることが分かります。ここで，g_{ij} は**斜交系での計量テンソル**で次の行列の i, j 成分です。

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

この意味で，(3.14) は (2.152) に対応する関係であると言えます。そして，斜交系での任意の共変ベクトルは，対応する反変ベクトル $A^{i'}$ から

$$A_{i'} = g_{ij}\ A^{j'} \tag{3.16}$$

として得ることができることが分かります。

また，ミンコフスキー空間の場合と同様に，(3.15) の逆行列

$$\left(g^{ij}\right) = \frac{1}{\sin^2\theta}\begin{pmatrix} 1 & -\cos\theta \\ -\cos\theta & 1 \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

の成分が，反変計量テンソル g^{ij} になります。

3.4.4　反・共変ベクトルの幾何学的な意味

図 3.7 から，斜交系ではベクトル $\vec{A}$ は，2 通りの表現 $((A^1,\ A^2)$ と $(A_1,\ A_2))$ とが可能であり，これら 2 組の数の組の間には次の関係があることが分かります。

$$\begin{aligned} A_1 &= A^1 + A^2\cos\theta \\ A_2 &= A^2 + A^1\cos\theta \end{aligned} \tag{3.18}$$

この関係は，前節で導入した計量テンソル (3.15) を用いると

$$A_i = g_{ij}A^j \tag{3.19}$$

と表され，関係 (3.16) と一致していることが分かります。また，(3.18) の逆の関係は，これを逆に解けば得られ，

$$\begin{aligned} A^1 &= \frac{A_1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}A_2 \\ A^2 &= -\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}A_1 + \frac{A_2}{\sin^2\theta} \end{aligned} \tag{3.20}$$

となります。そしてこの関係は，反変計量テンソル (3.17) を用いると

$$A^i = g^{ij} A_j \tag{3.21}$$

と書かれることが分かります。またこのとき，ベクトル $\vec{A}$ の大きさの 2 乗は*8

$$\vec{A}^2 = \sum_{i=1}^{2} A^i A_i \equiv A^i A_i \tag{3.22}$$

と表現されます。従って，任意の 2 つのベクトル $\vec{A}$，$\vec{B}$ の内積 (スカラー積) は

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = g_{ij} A^i B^j = A^i B_i = A_i B^i \tag{3.23}$$

と表されることが分かります。

ところで，上に定義した反変および共変ベクトルは，斜めに交わる 2 つの軸の角度 θ が $\frac{\pi}{2}$，つまり直交するときには互いに一致して，区別がなくなります。この場合のように，反変，共変の区別がなくなる座標系を選ぶことができるという事実と背景の空間がユークリッド的であることとの間には密接な関わりがあることに注意してください。

ユークリッド空間においては，現在扱っている計量テンソルが，一見どんなに複雑に見えても，扱っている座標系から直交座標系へと変換することによって次の基本的な計量テンソルに変換することができます*9 。

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

逆に，見かけ上どのように複雑に見える計量テンソルを扱っていても，適当な座標変換によって全空間に渡って (3.24) の形に持って来ることができれば，その空間はユークリッド空間ということができます。

3.4.5 直交座標系から極座標系へ

最後に，曲線座標系の一例として極座標系を取り上げて説明することにしましょう。空間中の一点は，適当に選んだ点を原点 O として位置ベクトル $\vec{r}$ により表され

*8 これは，図 3.7 より，余弦定理を用いれば $\vec{A}^2 = (A^1)^2 + (A^2)^2 + 2A^1A^2\cos\theta$ となることが分かるでしょう。

*9 もちろん，これは 2 次元ユークリッド空間の場合です。3 次元ユークリッドの場合は，明らかに行列は 3×3 となり対角線上の 1 は 3 つになります。

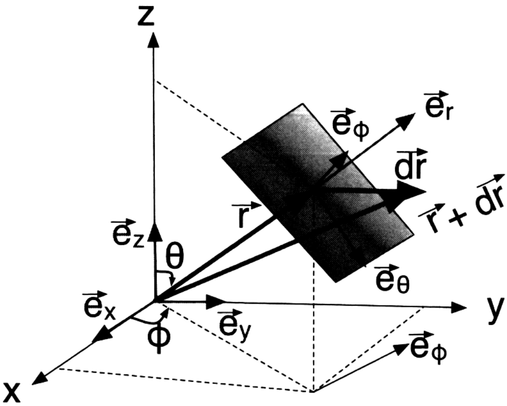


図 3.8　直交座標系と極座標系

ます。今，O を原点として図 3.8 のような直交座標系を設定すると，$\vec{r}$ は次のように表現されます。

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

ここで，$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ は，それぞれ x, y, z 軸の正方向を向いた大きさ 1 のベクトルの組 (直交座標系の基本単位ベクトル) です。成分 x, y, z は，極座標 (r, θ, ϕ) を用いると

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta \tag{3.25}$$

と表されます。

今，図 3.8 のように，$\vec{r}$ の指す点における局所的な極座標系の基本単位ベクトルを $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ とすると，これらのベクトルは，それぞれ r, θ, ϕ の増加する向きを考えることに依って得ることができます。即ち，$\vec{e}_r$ は，(3.25) において $r = 1$ として

$$\vec{e}_r = \sin\theta\cos\phi\ \vec{e}_x + \sin\theta\sin\phi\ \vec{e}_y + \cos\theta\ \vec{e}_z \tag{3.26}$$

また，$\vec{e}_\theta$ は，これを $\theta \to \theta + \frac{\pi}{2}$ として 90° 回転して，

$$\vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\ \vec{e}_x + \cos\theta\sin\phi\ \vec{e}_x - \sin\theta\ \vec{e}_z \tag{3.27}$$

そして，最後に $\vec{e}_\phi$ は，$\vec{r}$ の xy 面への正射影の単位ベクトル $\cos\phi\vec{e}_x + \sin\phi\vec{e}_y$ を $\phi \to \phi + \frac{\pi}{2}$ として 90° 回転して，

$$\vec{e}_\phi = -\sin\phi\ \vec{e}_x + \cos\phi\ \vec{e}_y \tag{3.28}$$

として得られます。また，これらの逆の関係は行列形で

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\phi \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

と書かれることが確認できるでしょう。従って，直交系で $A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$ と表された任意のベクトル $\vec{A}$ は，$\vec{A} = A_r\vec{e}_r + A_\theta\vec{e}_\theta + A_\phi\vec{e}_\phi$ とも表され，このときそれらの成分の間には，次の関係

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

或は，逆に

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

が成り立つことが分かります。

今，$\vec{A}$ として，$\vec{r}$ からの無限小変位 $d\vec{r}$ を選ぶと，この直交系での成分は dx, dy, dz であるため，その極座標系での成分は，(3.25) と (3.30) により

$$\begin{pmatrix} dr, & rd\theta. & r\sin\theta d\phi \end{pmatrix}, \qquad \text{或は} \quad \begin{pmatrix} dr \\ rd\theta \\ r\sin\theta d\phi \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

と計算されます。

こうして定義されたベクトルの極座標系での成分は，力学での速度など実際の応用の場面では次元の点からも自然な取り扱いと言えますが，相対論の立場からは，次元を度外視して座標の微分 $dr, d\theta, d\phi$ の組を反変ベクトルとして取り扱うのが普通です[*10]。そしてこのときは，次元の問題は以下に見るように計量テンソルに引き継がれることになります。

■計量テンソル 極座標系での計量テンソル g_{ij} は，変位ベクトル $d\vec{r}$ の大きさの２乗を考えることによって知ることができます。これは直交系では $d\vec{r}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

[*10] 解析力学で，角度も距離の次元を持つものも同列に扱う**一般座標**の概念と同じと考えれば良いでしょう。

であるため，(3.32) とこの転置行列により $d\vec{r}^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$ となることより

$$d\vec{r}^2 = \begin{pmatrix} dr & d\theta & d\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

と書かれることが分かります。従って，極座標系を用いた場合には，直交系を用いたときの計量テンソル δ_{ij} から次の計量テンソル g_{ij} へと変換されることになります。

$$(\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

ただし，δ_{ij} は，$i=j$ のとき1でそれ以外は0のクロネッカーの δ です。

次の節では，重力場を表現する舞台としての（擬）リーマン幾何学についてその概要を説明することにしましょう。

3.5　物理空間

擬リーマン空間 (Pseud-Riemannian space) とは，局所的（以後，任意に選んだ点の『近傍』と理解して下さい）に見れば擬ユークリッド空間（ミンコフスキー空間）であるような空間のことです。これは数学で云うリーマン空間が，局所的にはユークリッド空間であることに対応しています*11 。

ところで，アインシュタインの等価原理が成り立つとすると

重力 $\Longrightarrow$ 自由落下系 = 無重力 = 慣性系 = ミンコフスキー空間

と結論されるために，重力場は局所的にはミンコフスキー的になる空間，つまり擬リーマン空間によって表現することができることが分かります。

3.5.1　計量テンソル

地球上の緯線や経線のように局所的には互いに直交する曲線の組みを座標とする例からも分かるように，一般の擬リーマン空間でも，局所的には互いに直交する曲線群を座標系（局所直交座標系）に設定することはできます。このとき，この空間中の

*11 教科書に依っては，了解の下にリーマン空間も擬リーマン空間も同列に扱っているものもあります。実際，数学上の違いは計量テンソルの符号（signature）の違いのみです。

隣接する 2 点 P,Q の間の距離 ds は，これらの点の近傍に限れば，そこはミンコフスキー空間であるため，ミンコフスキー計量 η_{ij} を与える ξ^i $(i = 0, 1, 2, 3)$ でも，任意に選んだ斜交曲線座標系 x^i $(i = 0, 1, 2, 3)$ でも表現することができます：

$$ds^2 = \eta_{ij} d\xi^i d\xi^j = g_{ij} dx^i dx^j \tag{3.35}$$

ここで，g_{ij} は一般の斜交曲線座標系を設定したときの**計量テンソル** (metric tensor) で，η_{ij} とは次の関係にあります。

$$g_{ij} = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^j} \eta_{k\ell} \tag{3.36}$$

またこのとき，g_{ij} の反変成分 g^{ij} は，ミンコフスキー空間の場合と同様に g_{ij} の逆，つまり

$$g_{ij}\ g^{ik} = \delta_j{}^k \tag{3.37}$$

として定義されます。

3.5.2 テンソル

ベクトルやテンソルと云った概念は，擬リーマン空間においても一般座標系への変換を前提にするという以外は，平坦空間の場合と同様の手順で定義されます。

3.5.2.1 2 種類のベクトル

位置ベクトルの定義から始めましょう。概略は次の通りです。先ず，空間内に適当な座標系（座標曲線網）を設定します。次に，全空間を各点の近傍の平坦と見なせる微小な区間に分割します。そして，その各区間内にある座標曲線をその区間内の座標軸として，その区間内の点の位置を表します。これにより反変ベクトルの基本形である位置ベクトルが定義されます。その後の手順は，基本的に節 §3.4 でのそれと同じです[*12]。

具体的に進めましょう。

先ず，適当な曲線座標系 $x^i (i = 0, 1, 2, 3)$ を設定します。このとき，「平坦と見なせる領域」は，数学的には無限小であるため，この各座標曲線 x^i の各区間の該当する

---

*12 もちろん，ここでの取り扱いは現代微分幾何学的な扱いとは異なります。この点については，節 §2.2.6 の注を参照して下さい。

部分は，$dx^i (i = 0, 1, 2, 3)$ と表されます。従って，これらの成分の値に依ってこの区間の任意の点は表されることになります。

位置ベクトル dx^i は，一般の座標変換，つまり座標系 x^i から別の座標系 x'^i への座標格子の敷き直し

$$x'^i = x'^i(x) \tag{3.38}$$

において

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j \tag{3.39}$$

と変換することが微分学から結論されます。従って，任意の反変ベクトルは，これと同じ変換をする4つの量の組み A^i として定義されます。

$$A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j \tag{3.40}$$

また，これと逆向きに変換する量 B_i として共変ベクトルが定義されます。

$$B'_i = \frac{\partial x^p}{\partial x'^i} B_p \tag{3.41}$$

この変換性は，微分における"チェーンルール"

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} = \delta^k_j = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \tag{3.42}$$

により，

$$A'^i B'_i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} A^j B_k = A^i B_i \tag{3.43}$$

が成り立つことから明らかでしょう。

3.5.2.2　テンソルの定義

テンソルの定義は，基本的にミンコフスキー空間の場合と同じで，n 個のベクトルの直積と同じ変換をする量として n 階のテンソルは定義されます。例えば，今の場合，一般座標変換 (3.38) によって

$$T'^{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} T^{kl} \tag{3.44}$$

と変換する16個の量の集まりが，2階の反変テンソルで，

$$U'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} U_{kl} \tag{3.45}$$

と変換する量の組みが2階の共変テンソルです。また，

$$V'^{j}_{i} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}V_k{}^l \tag{3.46}$$

は2階の混合テンソルの一つです。

一般に，(p,q) 型の混合テンソルは，次のように変換する 4^{p+q} 個の量の組みとして定義されます。

$$X'^{i_1 i_2 \cdots i_p}{}_{j_1 j_2 \cdots j_q} = \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial x'^{i_2}}{\partial x^{k_2}}\cdots\frac{\partial x'^{i_p}}{\partial x^{k_p}}\frac{\partial x^{l_1}}{\partial x'^{j_1}}\frac{\partial x^{l_2}}{\partial x'^{j_2}}\cdots\frac{\partial x^{l_q}}{\partial x'^{j_q}}X^{k_1 k_2 \cdots k_p}{}_{l_1 l_2 \cdots l_q} \tag{3.47}$$

3.5.3 擬テンソル

節 §3.4.3 において，3次元ユークリッド空間においてさえ，用いる座標系によっては，2種類のベクトル（反変ベクトルと共変ベクトル）を区別する必要がある場合があることを見てきましたが，これは，“ベクトル”の本質に関するものではなく，単に表現の問題でした*13。

一方でまた，同空間には，共に『ベクトル』と称されている別種類の2つの量，極性ベクトルと軸性ベクトルとがあることを節 §2.6.4 の脚注で指摘しました。変換性から言えば，極性ベクトルが本来のベクトルで，軸性ベクトルは，ベクトルとは僅かに変換性を異にする擬ベクトルと呼ばれる範疇に入ります。

この節では，特別な場合として擬ベクトルを含む擬テンソルについて見ることにしましょう。

3.5.3.1 レビ・チビタ記号

節 §2.6.4 で導入した3次元の量 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ から始めましょう。

$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ は，2つの任意のベクトル $\vec{B}$ と $\vec{C}$ との外積 $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{C}$ を，成分表示するときに必要な量でした。

$$A_\alpha = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(B_\beta C_\gamma - B_\gamma C_\beta\right) \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}C_{\beta\gamma} \tag{3.48}$$

ここで，もちろん β, γ はダミー添字で，1から3までの和を取っています。この式からも分かるように，$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ は，任意の2階の反対称テンソル $C_{\alpha\beta}$ と軸性ベクトル A_α

---

*13 この点，ベクトルやテンソルを座標系と切り離して扱う現代微分幾何学的なアプローチは正解と言えるでしょう。しかし本書で，何故このアプローチを採用しないのかは，節 §2.2.6 の注で述べた通りです。

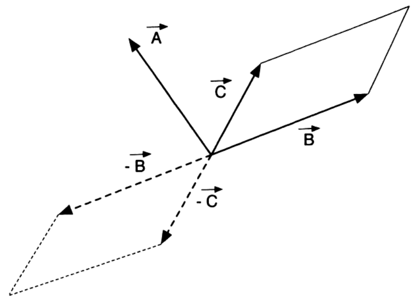


図 3.9 外積の定義：空間反転によってベクトル $\vec{B}$, $\vec{C}$ の符号は変わるが，外積の結果としての $\vec{A}$ は不変

とを結びつける役割を演じています。そしてこのとき，そのような関係にある両者はデュアル (dual) な関係にあると称されています。

外積の定義（図 3.9 参照）から明らかなように，空間反転（すべての空間軸の符号を負にする変換）に対して，掛け合わせる２つのベクトル（$\vec{B}$, $\vec{C}$）のそれぞれは符号を変え，生じた“ベクトル”($\vec{A}$) の方は符号を変えません。これは，この変換に対して $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ は不変であることを意味しています。

ところで，節 §2.2.6.2 で見たように，ベクトルの長さを保つ斉次一次変換 R は，行列式 $\det R$ が 1 のプロパー (proper) と-1 のインプロパー (improper) 変換とに分類されます。この内，普通の意味の回転はプロパーに，また，空間反転はインプロパー変換に属します。プロパー変換に対しては，軸性ベクトル $\vec{A}$ も極性ベクトルと全く同じに振る舞うことは明らかでしょう*14。

以上を総合すると，一般に，変換 R の下での $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ の変換性は

$$\epsilon'_{\alpha\beta\gamma} = \det(R)\ a_{\alpha\alpha'} a_{\beta\beta'} a_{\gamma\gamma'}\ \epsilon_{\alpha'\beta'\gamma'} = (\det(R))^2\, \epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \tag{3.49}$$

と結論されます。ここで，$a_{\alpha\beta}$ 等は行列 R の成分で，２段目のステップはそれらによる行列式 $\det(R)$ の表現

$$a_{\alpha\alpha'} a_{\beta\beta'} a_{\gamma\gamma'}\ \epsilon_{\alpha'\beta'\gamma'} = \det(R)\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \tag{3.50}$$

を適用したものです。

*14 軸性ベクトルの身近な例としては，角運動量や力のモーメントなどがありますね。これらは，空間反転など考えなければ普通にベクトルと考えられるでしょう。

こうして，変換ルール (3.49) から，$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ という量は，普通の 3 階のテンソルではなく擬テンソルに属するものであることが分かります。

以上の考察を参考にして，次に，4 次元の場合を考えましょう。本書で扱う物理空間は，局所的にはミンコフスキー空間であるためこの空間から始めることにします。

ミンコフスキー空間では，$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ に対応して 2 種類考える必要があります。これらを ϵ^{ijkm} と ϵ_{ijkm} とします。これらは，添字 i, j, k, m の任意の 2 つの交換に対して符号のみを変えるという共通の性質（完全反対称性）を持ち，その値はそれぞれ

$$\epsilon^{0123} = 1, \qquad \epsilon_{0123} = -1 \tag{3.51}$$

と定義されているとします。更に，これらはすべての慣性系において同様に定義されているとすると，(2.49) を満たす一般のローレンツ変換に対して

$$\epsilon'^{ijkm} = \det(A)\ a^i{}_{i'} a^j{}_{j'} a^k{}_{k'} a^m{}_{m'}\ \epsilon^{i'j'k'm'} = (\det(A))^2\, \epsilon^{ijkm} = \epsilon^{ijkm} \tag{3.52}$$

と変換することが要請されます。ここで，$a^i{}_j$ 等は，変換行列 A の成分です。一方，ϵ_{ijkm} は，普通のテンソルのようにミンコフスキー計量テンソル η_{ij} により，$\epsilon_{ijkm} = \eta_{ii'}\eta_{jj'}\eta_{kk'}\eta_{mm'}\ \epsilon^{i'j'k'm'}$ として得られます。

次に，局所的にはミンコフスキー空間と見なせる空間の場合へと進みましょう。この空間の局所領域において，η_{ij} を与える局所ミンコフスキー座標系 ξ^i から，計量テンソル g_{ij} を与える座標系 x^i へ，そして更に，x^i 系から g'_{ij} の他の任意の座標系 x'^i へ変換するとしましょう。

この変換チェーンの下に，計量テンソルは，(3.45) に従って

$$g_{ij} = \frac{\partial \xi^p}{\partial x^i}\frac{\partial \xi^q}{\partial x^j}\eta_{pq}, \quad g'_{ij} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^i}\frac{\partial x^q}{\partial x'^j}\ g_{pq} \tag{3.53}$$

と変換することが分かります。そして，これらの式の行列式を計算することに依って次の関係が求められるでしょう。

$$g = -J^2, \qquad g' = D^2\ g \tag{3.54}$$

ただし，$g \equiv \det(g_{ij})$，$\det(\eta_{pq}) = -1$，そして $J \equiv \det\left(\frac{\partial \xi^p}{\partial x^i}\right)$，$D \equiv \det\left(\frac{\partial x^p}{\partial x'^i}\right)$ と置いていることに注意して下さい。もちろん，g' は，x' 系での g に対応する量を表しています。

先に進む前にここで，テンソル密度と呼ばれている量の定義をしておきましょう。

■テンソル密度　一般座標変換 $(x \to x')$ に対して

$$\tilde{Q} = D^{\omega}\, Q \tag{3.55}$$

と変換するスカラー量に類似な量が，重み ω の**スカラー密度**と呼ばれている量 Q です[*15]。ここで，ω は，正または負の整数です。因みに，この定義によると行列式 g は，(3.54) との比較により重み 2 のスカラー密度であることが分かります。

一般に，スカラー密度として振る舞う任意の量を用いれば，任意のテンソル量 $A^{ij\cdots}{}_{km\cdots}$ から対応するテンソル密度として振る舞う量をいつでも作ることができます。

$$\mathcal{A}^{ij\cdots}{}_{km\cdots} = A^{ij\cdots}{}_{km\cdots}\, Q \tag{3.56}$$

或は逆に，任意のテンソル密度として振る舞う量から同じ幾何学的，または物理的な意味を持つ対応するテンソル量を求めることができます。

話しを元に戻し，ϵ^{ijkm} について考えましょう。そのために，先ず，ϵ^{ijkm} と同じ完全反対称性を持つ 4 階のテンソル T^{ijkm} のただ一つの独立な成分，例えば T^{0123} の一般座標変換の下での変換性について考えましょう。

T^{ijkm} は，4 階の反変テンソルであるため

$$T'^{ijkm} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^p}\frac{\partial x'^j}{\partial x^q}\frac{\partial x'^k}{\partial x^r}\frac{\partial x'^m}{\partial x^s}\, T^{pqrs} \tag{3.57}$$

と変換しますが，T^{pqrs} の完全反対称性のために右辺は

$$\frac{1}{D}\, T^{ijkm} \tag{3.58}$$

と書かれるでしょう[*16]。このことから，唯一の独立な成分 T^{0123} は，重みが -1 のスカラー密度として振る舞うことが分かります。

この結果から，我々の扱う ϵ^{ijkm} が，常にどのような座標系でも同じように定義されているとするとその独立成分 ϵ^{0123} の値は，常に 1 である必要があります。そして，これが成り立つためには，ϵ^{ijkm} は重み 1 のテンソル密度として変換しなければならないことが分かります。

$$\epsilon'^{ijkm} = D\, \frac{\partial x'^i}{\partial x^p}\frac{\partial x'^j}{\partial x^q}\frac{\partial x'^k}{\partial x^r}\frac{\partial x'^m}{\partial x^s}\, \epsilon^{pqrs} = \epsilon^{ijkm} \tag{3.59}$$

---

*15 ここでの定義は，参考文献 [6] に基づいています。

*16 係数が，$\frac{1}{D}$ であることは，チェーンルール (3.42) の行列式を考えることによって知ることができます。

従って，ϵ^{ijkm} に対応するテンソル量 E^{ijkm} は，この事実に，g が重み 2 のスカラー密度であることを考慮して

$$E^{ijkm} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\epsilon^{ijkm} \tag{3.60}$$

として作ることができます。一方，ϵ_{ijkm} の不変性も同様に認めれば E^{ijkm} のテンソル性は保証されているため，

$$E_{ijkm} = g_{ip}g_{jq}g_{kr}g_{ms}E^{pqrs} = \sqrt{-g}\;\epsilon_{ijkm} \tag{3.61}$$

として対応する共変テンソル量を求めることができます。これから，ϵ_{ijkm} は，重み -1 のテンソル密度であることが分かります。

3.5.3.2 その他の例

参考のために，その他の擬テンソル（テンソル密度）の例を挙げておきましょう。

体積素片 局所ミンコフスキー空間において，4 種類の独立な無限小ベクトル $a^i = (d\xi^0, 0, 0, 0)$，$b^i = (0, d\xi^1, 0, 0)$，$c^i = (0, 0, d\xi^2, 0)$，$d^i = (0, 0, 0, d\xi^3)$ が作る体積素片

$$d\Omega_0 = d\xi^0 d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = \begin{vmatrix} d\xi^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d\xi^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d\xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d\xi^3 \end{vmatrix} = -\epsilon_{ijkm}\; a^i b^j c^k d^m \tag{3.62}$$

は，一般の座標系 x^i への変換に対して各成分ベクトルが $a'^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^p} a^p$ 等と変換するため，これらの逆の関係

$$a^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^p} a'^p \tag{3.63}$$

等を用いると

$$d\Omega_0 = -\epsilon_{ijkm} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^p} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^q} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^r} \frac{\partial \xi^m}{\partial x^s}\; a'^p b'^q c'^r d'^s = J\; d\Omega \tag{3.64}$$

と変換することが分かります。故に，これに (3.54) からの結果を用いれば

$$d\Omega_0 = \sqrt{-g}\; d\Omega \tag{3.65}$$

と書くことができます。この左辺は，スカラー量であるため右辺も全体としてはそうなります。この結果から，スカラー量 φ の 4 次元体積積分を行なう場合に，スカラー量としての結果を望むなら

$$\int \varphi\sqrt{-g}\; d\Omega \tag{3.66}$$

とすべきであることが分かります。

面積素片　3つの独立な無限小ベクトル ${}_1dx^i$, ${}_2dx^i$, ${}_3dx^i$ が張る3次元超曲面の面積素片 dS^{ijk} について考えましょう。これは一般に

$$dS^{ijk} = \begin{vmatrix} {}_1dx^i & {}_2dx^i & {}_3dx^i \\ {}_1dx^j & {}_2dx^j & {}_3dx^j \\ {}_1dx^k & {}_2dx^k & {}_3dx^k \end{vmatrix} \tag{3.67}$$

と定義されます。この定義より，dS^{ijk} は，すべての添字 i, j, k について完全反対称であるため，独立な成分は4つであることが分かります。従って，この量を直接扱うより，これにデュアルな重み -1 のベクトル密度

$$dS_i = -\frac{1}{3!}\,\epsilon_{ijkm} dS^{jkm} \tag{3.68}$$

を持って扱われるのが普通です。もちろん，対応するベクトル量はこれに $\sqrt{-g}$ をかけることに依って得ることができるでしょう。

3.5.4　接続

大雑把に言って，局所的な平坦空間（接空間）とこれに隣接する局所的な平坦空間（接空間）の間の関係を規定するのが**接続** (connection) と呼ばれる量です[*17]。特に，本テキストで扱っている物理空間としての擬リーマン空間のような捩率（捩れ）を持たず，計量テンソルの定義された空間（計量空間と呼ばれます）においては，**クリストッフェル記号** (Christoffel symbol) と呼ばれる（テンソルではない）量が，この役割を演じます。

一般に，接続 Γ は，隣接する2点 x^i, $x^i + dx^i$ の間でのベクトルの平行移動を規定します。点 x^i における任意の反変ベクトルを A^i，これを隣接した点 $x^i + dx^i$ まで平行移動したベクトルを $A^i_{\shortparallel}$ とすると，これと元のベクトル $A^i(x)$ との差（左辺）

$$A^i_{\shortparallel} - A^i(x) = \delta A^i \equiv -\Gamma^i_{jk} A^j dx^k \tag{3.69}$$

が平行移動による変化量です。この差は，2点間が十分隣接している場合には，最右辺のように表現することができます。この場合の64個の係数 $\Gamma^i{}_{jk}$ が接続の成分で，その各々は x^i のみに依存することができます。

---

*17 現在の微分幾何学では色々な種類の接続が考えられていますが，本書では，この内で最も基本的で，一般相対論と整合する**アフィン接続**と呼ばれるもののみを“接続”として扱います。

因みに，この差 δA^i は，空間の異なる場所 x^i と $x^i + dx^i$ にある２つのベクトルの間での差で，異なった場所にあるベクトルの変換性は同じではないため，全体としてはベクトルの変換性を持たないことに注意する必要があります。そしてこの結果として，次に説明する『商法則』により接続 Γ は，テンソル性を持たないことが分かります。

3.5.4.1　商法則

テンソルの変換則 (3.47) を用いることによって，次の法則が成り立つことを容易に証明することができます。

テンソル性を持つ量（例えば，$T^{ijk}{}_{mn}$）と不明な量（例えば，X^{ij}）との間の“積”の結果が，テンソル性を持つ場合は，不明な量はテンソルで，持たない場合は，テンソルではない。

ここで，“積”とは，次の例のように上下で添字を合わせて和を取る操作を指します。

$$
\begin{aligned}
&T^{ijk}{}_{mn}X^{mn} = Y^{ijk}, \\
&T_{ij}{}^{k}{}_{mn}X^{ij} = Z^{k}{}_{mn}, \qquad \text{ただし}, T_{ij}{}^{k}{}_{mn} = g_{il}g_{jr}T^{lrk}{}_{mn} \\
&T_{i}{}^{jk}{}_{mn}X^{il} = A^{jkl}{}_{mn}, \qquad \text{ただし}, T_{i}{}^{jk}{}_{mn} = g_{il}T^{ljk}{}_{mn}
\end{aligned}
$$

これらの“積”の結果として，Y,Z がテンソルで，A がそうでなかったとすると，最初と第２番目の X は，それぞれ２階の反変テンソルで，第３番目のはテンソルではないと結論されます。

問 3.5.4.1.1　V^i が反変ベクトルであることは分かっているとします。これを用いて変換性が不明な量 W_i のベクトル性を判定しなさい。また，ベクトルである場合については，その変換性を示しなさい。

3.5.4.2　クリストッフェル記号

（擬）リーマン空間の接続としてのクリストッフェル記号 $\Gamma^i{}_{jk}$ はつぎのように定義されます。

(a) 下付きの２つの添字について対称である ($\Gamma^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{kj}$)。 (b) 平行移動においてベクトルの長さは保持される。

条件 (a) は，空間を（擬）リーマン空間として規定する公理の一つと考えれば良い

でしょう[*18]。この条件 (a) を考慮して第2の条件 (b) を考えましょう。

条件 (b) は，任意の反変ベクトル A^i に対して次のように書かれます。

$$g_{ij}(x)A^i(x)A^j(x) = g_{ij}(x+dx)A^i_{\shortparallel}A^j_{\shortparallel} \tag{3.70}$$

この式に (3.69) からの $A^i_{\shortparallel}$ を代入して整理した後で，第1種クリストッフェル記号 $\Gamma_{i,jk}$

$$\Gamma_{i,jk} \equiv g_{il}\Gamma^l_{jk} \tag{3.71}$$

を導入して書き直すと次の関係が導かれます[*19]。

$$\Gamma_{k,lm} + \Gamma_{l,km} = g_{kl,m} \tag{3.72}$$

この式から添字 k, l, m を順にサイクリックに入れ替えて同様な関係式をあと2つ作り，クリストッフェル記号の添字の対称性を考慮して，これらを足したり引いたりすることによって

$$\Gamma_{k,lm} = \frac{1}{2}(g_{kl,m} + g_{km,l} - g_{lm,k}) \tag{3.73}$$

が導かれます。そして最終的に次の結論に達することができるでしょう[*20]。

$$\Gamma^i_{jk} = g^{il}\Gamma_{l,jk} = \frac{1}{2}g^{il}(g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l}) \tag{3.74}$$

ここ以降では，特に断らない限り，接続はこのクリストッフェル記号を指しているとします。

問 3.5.4.2.1 座標系の変換 $(x^i \to x'^i)$ の下に，クリストッフェル記号 $\Gamma^i{}_{jk}$ は，次の式に従って変換することを示し，その量がテンソルでないことを説明しなさい。

$$\Gamma'^i{}_{jk} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^\ell}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k}\Gamma^\ell{}_{mn} + \frac{\partial x'^i}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^j \partial x'^k} \tag{3.75}$$

---

*18 接続が，反対称成分を持つ空間は一般に非リーマン空間 (リーマン・カルタン空間) とよばれる空間で，(擬) リーマン空間が曲率のみしか持たないのに対して捩率をも持った空間と言えます。

*19 定義からも明らかなように最初のクリストッフェル記号の添字の対称性は，第1種のクリストッフェル記号にもコンマ (,) 後の2つの添字の対称性として引き継がれます。

*20 これは第2種クリストッフェル記号と呼ばれることがあります。

或いは，逆に

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^n}\frac{\partial x'^\ell}{\partial x^j}\frac{\partial x'^m}{\partial x^k}\Gamma'^n{}_{\ell m} - \frac{\partial x'^\ell}{\partial x^j}\frac{\partial x'^m}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^\ell \partial x'^m} \tag{3.76}$$

3.5.5 曲率テンソル

（擬）リーマン空間は，接続の２つの添字の間の対称性を仮定したため，より一般的な空間が持つ捩率と曲率の２つの可能性の内から捩率を取り除いた，曲がりのみを持った空間となったと考えれば良いでしょう。因に，一般の接続の反対称部分 $\Gamma^i{}_{jk} - \Gamma^i{}_{kj}$ は一つのテンソルで，これは捩率を表すトーションテンソル (torsion tensor) と本質的に同じです*21。

空間の曲がりは，ベクトルの平行移動を利用すると，任意の閉曲線に沿って１周して戻って来たベクトルと出発時のベクトルとの差を目安として計ることができます。つまり，ある点の周りを巡るどのような経路を選んでも出発時のベクトルと変わりない場合は，その点，およびその近傍では空間は曲がっていないと言えます。

（擬）リーマン空間中の任意の点 O における曲率を表すテンソル（**リーマン テンソル**）は，具体的にはつぎのようにして求めることができます。

(1) 曲率を知りたい点 O を起点として，任意の無限小平行四辺形を描く。
(2) 描いた平行四辺形に沿って，任意の反変ベクトル A^i を平行移動する。
(3) 一周して戻って来たベクトルと元のベクトルとの差 δA^i を計算する。

(1) について　無限小平行四辺形は，最初に点 O を起点とした任意の２つの無限小変位 dx^i と δx^j とを考え，一方を他方に沿って（例えば δx^j を dx^i に沿って）平行移動することによって作ることができます。

実際，δx^i の dx^i に沿う平行移動により作られる辺は，$\delta x^i - \Gamma^i{}_{jk} dx^j \delta x^k$ で，このベクトルの終端の位置 Q は $x^i + dx^i + \delta x^i - \Gamma^i{}_{jk} dx^j \delta x^k$ となります。これに対して，dx^i の δx^i に沿う平行移動により作られる辺の終端の位置 Q' は，$x^i + dx^i + \delta x^i - \Gamma^i{}_{jk} \delta x^j dx^k$ となり，一見すると Q と異なりますが，今考えている捩率のない（擬）リーマン空間では，接続 $\Gamma^i{}_{jk}$ の下２つの添字の対称性のために両者は一致することが分かりま

*21 捩率を含んだ一般相対論の自然な拡張となる理論が，素粒子論の方から『重力のゲージ理論』として提案されています。これらの理論が現実の現象（一般相対論では説明できない現象，ダークマターやダークエネルギーなどとの関係）をどこまで説明できるのかは未だ不明です。

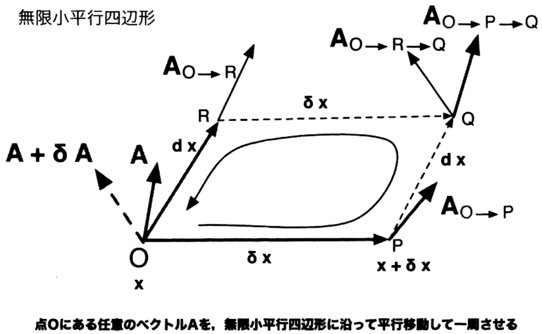


図 3.10　**リーマンテンソルの定義**：δA^i は，A^i を $O \to P \to Q$ と平行移動した ${A^i}_{O\to P\to Q}$ から反対回りに平行移動した ${A^i}_{O\to R\to Q}$ を引いたものに等しい。

す[*22]。しかしながら，こうして得られた四辺形は，無限小な２辺をそれぞれ平行移動してできた平行四辺形ですが，厳密には普通の意味での平行四辺形とは言えませんね。しかし，平行移動により生じた２次の無限小項は，ここではより高次の項としてのみ役割を演じるため無視することができます。従って，得られた四辺形は，無限小であるが故に普通の意味での平行四辺形として扱うことができます

最後に，作られた平行四辺形の面積は，面テンソル

$$\Delta S^{kl} \equiv \delta x^k dx^l - \delta x^l dx^k \tag{3.77}$$

によって表現されることに注意しておきましょう[*23]。

(2) について　先ず，ベクトル A^i の１周 $(O \to P \to Q \to R \to O)$ の平行移動に依る変化量 δA^i は，A^i を $O \to P \to Q$ と平行移動してできたベクトル ${A^i}_{O\to P\to Q}$ から逆回りに平行移動してできたベクトル ${A^i}_{O\to R\to Q}$ を差し引くことによって得ることができることに注意しましょう。

---

*22 一般のこの Γ の対称性を持たないリーマン・カルタン空間の場合には Q と Q' とは一致しないため，この空間では一般には平行四辺形はできないことになります。

*23 面テンソルの３次元版は，２つのベクトル $\vec{A}$, $\vec{B}$ の外積 $\vec{C} \equiv \vec{A} \times \vec{B}$ の大きさが，$\vec{A}$, $\vec{B}$ が作る平行四辺形の面積に等しいことに注意してこれを成分で表すことに依って得られます。$C_\alpha = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}(A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta)$。ここで，反対称テンソル $A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta$ が面を定義するテンソルで，C_α が，この面に垂直なベクトル（面テンソルにデュアルなベクトル）です。

${A^i}_{O\to P\to Q}$ は，先ず，A^i を O から P へ平行移動して

$$ {A^i}_{O\to P} = A^i - {\Gamma^i}_{jk}(x) A^j \delta x^k $$

を得て，更にこれを P から Q へ平行移動して得られます。

$$ {A^i}_{O\to P\to Q} = {A^i}_{O\to P} - {\Gamma^i}_{jk}(x+\delta x) {A^j}_{O\to P} dx^k \tag{3.78} $$

反対回りについても同様にして

$$ {A^i}_{O\to R} = A^i - {\Gamma^i}_{jk}(x) A^j dx^k \tag{3.79} $$

$$ {A^i}_{O\to R\to Q} = {A^i}_{O\to R} - {\Gamma^i}_{jk}(x+dx) {A^j}_{O\to R} \delta x^k \tag{3.80} $$

ここで，${\Gamma^i}_{jk}$ が位置の関数であることに注意が必要です。

（3）について　（2）の結果を用いると，A^i を平行四辺形に沿って一回り平行移動したときの変化量 δA^i は，

$$ \delta A^i = {A^i}_{O\to P\to Q} - {A^i}_{O\to R\to Q} = -\frac{1}{2} {R^i}_{jkl} A^j \Delta S^{kl} \tag{3.81} $$

と計算されることが確かめられるでしょう。ここで，

$$ {R^i}_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{jl} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{jk} \tag{3.82} $$

と置いたことに注意して下さい。

${R^i}_{jkl}$ は，用いた A^i にも選んだ閉回路（ここでは微小な平行四辺形）にも依存せず，ただ考えている点 O における接続 ${\Gamma^i}_{jk}$ とその導関数 $\frac{\partial {\Gamma^i}_{jl}}{\partial x^k}$ にのみ依存するテンソル量であるため，考えている空間の点 O に固有の量であると結論できます[*24]。また，この量は，空間が平坦であれば Γ もその導関数も 0 となる座標系が選べるため，そのテンソル性によりすべての座標系ですべての成分が 0 となります。このことを考慮すると，この量は考えている時空の考えている点での平坦からのズレ（今の場合は曲がり，あるいは曲率）を表す量として定義されることが分かります。このため，この量は**曲率テンソル**とか，あるいはリーマンの名に因んで**リーマン テンソル**とか呼ばれています。

[*24] ${R^i}_{jkl}$ のテンソル性は，δA^i が反変ベクトルであることより商法則により明らかでしょう。

■独立な成分の数　リーマンテンソルは，その定義式 (3.82) から直ちに，次の対称性を持つことが分かります。

(1) $R^i{}_{jkl} = -R^i{}_{jlk}$
(2) $R^i{}_{[jkl]} \equiv \frac{1}{3}(R^i{}_{jkl} + R^i{}_{klj} + R^i{}_{ljk}) = 0$

(2) の対称性は，対称性が座標変換によっても維持されることを利用して，局所慣性系へ移って考えると証明は容易です。この系では，$\Gamma^i{}_{jk} = 0$ となる座標系（測地座標系と呼ぶことにします）を選ぶことができるため右辺の（ ）内は

$$\Gamma^i{}_{jl,k} - \Gamma^i{}_{jk,l} + \Gamma^i{}_{kj,l} - \Gamma^i{}_{kl,j} + \Gamma^i{}_{lk,j} - \Gamma^i{}_{lj,k} = 0$$

となり容易に証明できます[*25]。ここで，微分はコンマ（,）で表したこと，および対称性 $\Gamma^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{kj}$ を用いたことに注意して下さい。

更に，メトリック g_{ij} を用いて，共変なリーマンテンソル

$$R_{ijkl} \equiv g_{im} R^m{}_{jkl} = \frac{\partial \Gamma_{jl,i}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk,i}}{\partial x^l} + (\Gamma\text{を含む項}) \tag{3.83}$$

を定義すると，次の追加の対称性が得られます。

(3) $R_{ijkl} = -R_{jikl}$
(4) $R_{ijkl} = R_{klij}$

これらの証明は，$\Gamma^i{}_{jk} = 0$ となる測地座標系を用いると共に，(3.73) を用いれば直接的に成されます。

以上の対称性を考慮すると，リーマンテンソルの独立な成分の数は，20 個であることが分かります[*26]。

[*25] 空間が曲がっている限り，ある局所慣性系で $\Gamma^i{}_{jk} = 0$ となる測地座標系を選んでも，この座標系でこれに隣接した局所慣性系でもそうなるとは言えません。従って，一般には Γ とその導関数とが同時に 0 となる座標系を選ぶことはできないことになります。

[*26] (1) と (3) により，R_{ijkl} は前 2 つ，後ろ 2 つの添字について反対称であるため，$(ij) = \{01, 02, 03, 12, 23, 31\} \longrightarrow (A) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ として添字の付け替えをすると，(4) より $R_{AB} = R_{BA}$，つまり R_{AB} は対称な 6×6 行列として表現できることが分かります。従って，独立な成分数は，この時点で $3 + \frac{36}{2} = 21$ 個となります。最後に，(2) を考察して，これから得られる独立な関係が $R_{14} + R_{26} + R_{34} = 0$ のみであることを確認すれば $21 - 1 = 20$ となることが分かります。

3.5.6 アインシュタイン テンソル

リーマンテンソルを 1 回縮約すると，**リッチテンソル** (Ricci tensor)

$$R_{ij} = R^m{}_{imj} \tag{3.84}$$

が，更に，これにメトリックテンソル g^{ij} をかけて縮約すると，**スカラー曲率**

$$R = g^{ij} R_{ij} \tag{3.85}$$

が得られます。

因に，R_{ij} と R とを組み合わせた次の量が，後に重要になる**アインシュタイン テンソル**です。

$$G^{ij} \equiv R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R \tag{3.86}$$

3.5.7 共変微分

曲った空間では，隔たった点のベクトルは，座標変換に際して異なる変換をするため，それらの間のベクトルの和や差は，もはやベクトルであることはできません*27。

普通の微分は，$x^i + \Delta x^i$ の位置にあるベクトル $A^i(x^j + \Delta x^j)$ から x^i の位置にあるベクトル $A^i(x^j)$ を引くという手続きを経て定義されています。つまり

$$A^i{}_{,j} \equiv \frac{\partial A^i}{\partial x^j} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A^i(x^j + \Delta x^j) - A^i(x^j)}{\Delta x^j} \tag{3.87}$$

これは，最初に述べた理由により，曲がった空間ではテンソルではありません。テンソル性を持ち平坦空間の場合にはこの定義に帰着する自然な形での一般化は，ベクトル $A^i(x^j)$ の代わりに，このベクトルを $x^i + \Delta x^i$ の位置まで平行移動して持ってきたベクトル $A^i{}_{\parallel}$ を用いることによって成されます。

$$A^i{}_{;j} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A^i(x^j + \Delta x^j) - A^i_{\parallel}}{\Delta x^j} = A^i{}_{,j} + \Gamma^i{}_{jk} A^k \tag{3.88}$$

---

*27 変換係数 $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}$ などが場所と時間の関数であることより明らかでしょう。

これは明らかにテンソル性を持っています。このように，テンソル性を維持するように修正された微分の拡張版を共変微分と呼んでいます。(3.88) は，反変ベクトル A^i を共変微分して得られた共変導関数で，これが2階の混合テンソルであることは反変ベクトル dx^j との積 $DA^i \equiv A^i{}_{;j}dx^j$ が反変ベクトルの振る舞いをすることから明らかでしょう。因みに，DA^i は，A^i の微分 $dA^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^k}dx^k$ の一般化で，いわゆるこれが A^i の共変微分です。

以後，このテキストでは，普通の微分をコンマ (,) で共変微分をセミコロン (;) で表すことにします[*28]。

問 3.5.7.1　問 3.5.4.2.1 で得たクリストッフェル記号の変換式と反変ベクトル A^i の変換式を用いて，A^i の共変微分 $DA^i(= A^i{}_{;j}dx^j)$ が反変ベクトルであることを直接示しなさい。

3.5.7.1　スカラー場の共変微分

座標変換 $x^i \to x'^i$ に依って，スカラー場 φ は，不変（$\varphi(x) = \varphi'(x')$）であり，また，４次元勾配（4元グラディエント）は

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial x^j} \tag{3.89}$$

と共変ベクトルと同じ変換をするため，スカラー場の微分は結局

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \tag{3.90}$$

と共変ベクトルと同じ変換をすることが分かります。一方で，スカラー場は平行移動によっても変わらないため，結局その共変微分は**普通の微分に一致する**と結論されます。

3.5.7.2　共変ベクトルの共変微分

任意の反変ベクトル A^i と共変ベクトル B_i の積からスカラー場 $A^i\ B_i$ が作られ，そして，これは全体として平行移動に依って変化しないこと，つまり $(A^iB_i) = (A^iB_i)_{\parallel} = A^i{}_{\parallel}B_{i\parallel}$ が成り立つこと，およびスカラー場の共変微分は普通の微分と同じであることを考慮すると共変ベクトルの共変微分の公式へと導かれます：

*28 紛らわしいですが，『微分する』という操作と微分した結果として生じた導関数をコンマで表し，無限小量を表す『微分』を d で表すのと同じように，セミコロン (;) や D を用いるという意味です。

$$\begin{aligned}
\left(A^i\ B_i\right)_{;j} &= \lim_{\Delta x^j \to 0} \frac{A^i(x^j+\Delta x^j)B_i(x^j+\Delta x^j) - A^i{}_{\|}B_{i\|}}{\Delta x^j} \\
&= \lim_{\Delta x^j \to 0} \left(\frac{A^i(x^j+\Delta x^j) - A^i{}_{\|}}{\Delta x^j}\ B_i(x^j+\Delta x^j) \right. \\
&\quad \left. + A^i{}_{\|}\ \frac{B_i(x^j+\Delta x^j) - B_{i\|}}{\Delta x^j} \right) \\
&= A^i{}_{;j}\ B_i + A^i\ B_{i;j}
\end{aligned} \tag{3.91}$$

この結果は共変微分についても『微分の積のルール（ライプニッツ ルール）』が成り立つことを示していますが，これと

$$\left(A^i\ B_i\right)_{,j} = A^i{}_{,j}\ B_i + A^i\ B_{i,j}$$

とが等しいことから (3.88) を用いると次の結果に導かれます。

$$B_{i;j} = B_{i,j} - \Gamma^k{}_{ij}B_k \tag{3.92}$$

3.5.7.3 一般のテンソルの共変微分

一般のテンソルの共変微分を考える場合，テンソルとしては同じ振る舞いをするためベクトルの積として表される特殊なテンソルで考えれば十分です。このとき，共変微分についても，普通の微分と同じようにライプニッツ ルール (3.91) が成り立つことを考慮して，(3.88) と (3.92) とを用いれば，例えば

$$\begin{aligned}
T^{ijk\cdots}{}_{mn\cdots;l} &= T^{ij\cdots}{}_{mn\cdots,l} + \Gamma^i{}_{rl}T^{rj\cdots}{}_{mn\cdots} + \Gamma^j{}_{rl}T^{ir\cdots}{}_{mn\cdots} \cdots \\
&\quad - \Gamma^r{}_{ml}T^{ij\cdots}{}_{rn\cdots} - \Gamma^r{}_{nl}T^{rj\cdots}{}_{mr\cdots} - \cdots
\end{aligned} \tag{3.93}$$

のような一般の公式が得られるでしょう。

問 3.5.7.2 内積 A^iB_i が平行移動によって変化しないという事実を利用して，共変ベクトル B_i の平行移動による変化量が次式で与えられることを示しなさい。

$$\delta B_i = \Gamma^\ell{}_{ik}B_\ell dx^k \tag{3.94}$$

ただし，反変ベクトル A^i の平行移動による変化量は $\delta A^i = -\Gamma^i{}_{jk}A^j dx^k$ とします。

問 3.5.7.3　ライプニッツ ルールが成り立つとして，2 階の混合テンソル A^iB_j に対する共変微分から任意の 2 階の混合テンソル $T^i{}_j$ の共変導関数が次式で与えられることを示しなさい。

$$T^i{}_{j;k} = T^i{}_{j,k} + \Gamma^i{}_{mk}T^m{}_j - \Gamma^m{}_{jk}T^i{}_m \tag{3.95}$$

問 3.5.7.4　計量テンソル g_{ij} の共変微分（$g_{ij;k}$）が 0 となることを，(3.74) を用いて示すことによって次の関係が成り立つことを説明しなさい。

$$A_{i;j} = g_{ik}A^k{}_{;j} \tag{3.96}$$

ただし，A^i は，任意の反変ベクトルであるとします。

問 3.5.7.5　問 3.5.7.3 の結果を利用して，任意の反変ベクトル A^i に対して次の関係が成り立つことを示しなさい。ただし，$R^i{}_{jk\ell}$ はリーマンテンソルとします。

$$A^i;j;k - A^i{}_{;k;j} = R^i{}_{\ell kj}A^\ell \tag{3.97}$$

3.5.8　ビアンキ恒等式

共変微分の操作 $(;i)$ を記号 D_i で表すと，次の関係が成り立つことを示すことができます*29。

$$[D_i,\ D_j]\,A^k = R^k{}_{lij}\ A^l, \tag{3.98}$$

$$[D_i,\ D_j]\,(D^kB_l) = R^k{}_{mij}\ D^m\ B_l - R^m{}_{lij}D^kB_m \tag{3.99}$$

ただし，$[D_i, D_j] \equiv D_iD_j - D_jD_i$ は，量子力学で馴染みの交換子（コミュテータ ブラケット）を意味するとします。

これらの関係を次のヤコビの恒等式

$$[[D_i,\ D_j],\ D_k]\,A^l + [[D_j,\ D_k],\ D_i]\,A^l + [[D_k,\ D_i],\ D_j]\,A^l = 0 \tag{3.100}$$

に用いると，次の**ビアンキ (Bianchi) の恒等式**を得ることができます*30。

*29 具体的な計算については，問 3.5.7.5 の結果と演算子 D_i についてもライプニッツ ルールが成り立つことに注意すればよいでしょう。

*30 ヤコビ (Jacobi) の恒等式は，解析力学ではポアッソン括弧式についても成り立つことが証明されていますね (例えば，参考文献 [1] で紹介した『力学』にはかなり詳しい証明があります)。しかし，交換子については自明でしょう。

$$R^i{}_{jkl;m} + R^i{}_{jlm;k} + R^i{}_{jmk;l} = 0 \tag{3.101}$$

ただし，この導出においてリーマンテンソルの持つ循環対称性 (2) を用いていることに注意して下さい[*31]。

このビアンキ恒等式を2回縮約して，計量テンソルの共変微分が0という事実（問3.5.7.4を参照して下さい）を用いると，アインシュタイン テンソル (3.86) の共変発散が0となることが確かめられます：

$$R^j{}_{m;j} - \frac{1}{2}R_{,m} = 0 \tag{3.102}$$

更に，これに g^{im} をかけて m について和を取ると最終的に

$$G^{ij}{}_{;j} = \left(R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R\right)_{;j} = 0 \tag{3.103}$$

が得られます。

3.6 重力場の方程式

重力は時空の曲りとして表現することができることを等価原理の節で既に述べてきましたが，ではその時空を曲げているものは何でしょうか。ニュートン力学では物質の質量が万有引力の源でした。従って，物質の質量が時空を曲げている源と考えるのが自然でしょう。

ところが，特殊相対論では，質量はエネルギーと同値で，そのエネルギーは運動量と一体となった4元運動量ベクトル (2.205) の第0成分でした。このことから4元運動量が重力の源と考えられますが，実際の所，『粒子』のエネルギーとか運動量というように，4元運動量は，1個あるいは，たくさんの粒子の集合全体としての量を表しています。従って，重力の源と成る物質やエネルギーなどが，ある領域に渡って連続的に分布しているような場合の記述には適さないことが分かります。このような場合も含めて必要なのは“密度”の考え方です。4元運動量 p^i の密度に相当する量が，**エネルギー・運動量テンソル** $T^{ij}(= T^{ji})$ です[*32]。そしてこれを用いると，p^i は次式で与えられます。

[*31] 逆に，循環対称性 (2) もヤコビの恒等式からビアンキ恒等式と共に同時に求められるとも言えます。

[*32] T^{00} がエネルギー密度，$\frac{1}{c}T^{0\alpha}$ が運動量密度，$T^{\alpha\beta}$ が応力テンソルを表していることから，T^{ij} はストレス・エネルギー・運動量テンソルとも呼ばれることがあります。

$$p^i = \frac{1}{c}\int T^{ij}\sqrt{-g}\, dS_j \tag{3.104}$$

ここで，dS_j は，(3.68) において説明したミンコフスキー空間では $dS_j = (dxdydz, 0, 0, 0)$ となるように一般化された擬リーマン空間内の 3 次元超曲面の“面積”素片です。従って，特殊相対論では，上の積分は

$$p^i = \frac{1}{c}\int T^{i0} dxdydz$$

と普通の体積積分に帰着するため，T^{00} がエネルギー密度，$\frac{1}{c}T^{0\alpha}$ が運動量密度と呼ぶに相応しいことが良く分かります。

アインシュタインは，この T^{ij} を重力源（時空を曲げているもの）と見なし，電磁気学のマックスウェル方程式を手本として次の**アインシュタインの重力場の方程式**として知られる方程式に到達しました[*33]。

$$R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R = \kappa T^{ij} \tag{3.105}$$

この左辺は，時空の曲率を表す量から構成されています。節 §3.5.6 において見たように，R^{ij} はリーマンテンソル ${R^i}_{jkl}$ を縮約して得られるリッチテンソルで，R は，更にリッチテンソルをもう一度縮約して得られるスカラー曲率です。そして，このリッチテンソルとスカラー曲率の組み合わせが，アインシュタイン テンソル (3.86) でした。一方，右辺は，重力を生み出す源としてのエネルギー・運動量テンソル T^{ij} から成っています。κ はアインシュタインの重力定数と呼ばれている定数で，ニュートンの万有引力定数とは $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ の関係にあります。これについてはニュートン近似の節で示すことにしましょう。

3.7 エネルギー・運動量保存則

アインシュタイン方程式についての議論に入る前に，先ず，準備としてマックスウェル方程式の第 2 組から得られる事柄について見ることにしましょう。

*33 アインシュタイン方程式 (3.105) のより詳しい導出に関心のある読者は，例えば参考文献 [4] を参照されることをお勧めします。

3.7.1 連続の式

真空中でのマックスウェル方程式の第２組の式 (2.223) の両辺の発散を取ります。

$$F^{ij}{}_{,ji} = \mu_0 j^i{}_{,i}$$

この左辺は，電磁場テンソル F^{ij} の反対称性により恒等的に０となるため直ちに次の**連続の式**と呼ばれている関係式が得られます。

$$j^i{}_{,i} = 0 \tag{3.106}$$

これを，ある単一閉曲面 S で囲まれた領域について体積積分すると

$$\frac{d}{dt}\int_S \rho dV + \int_S \mathrm{div}\vec{j}\ dV = 0$$

が得られ，更に，この左辺第２項にガウスの定理を用いて書き直すと

$$-\frac{d}{dt}Q = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S} \tag{3.107}$$

が導かれます。ただし，Q は閉曲面 S で囲まれた領域内の全電荷量です。

この式の物理な意味について考えましょう。この式は，明らかに，１秒当たりに Q が減少する割合がこの間に S を通りぬけて出て行く電流量に等しいことを表しています。そして，電流が電荷の流れであることを考慮すると，この式は，結局，電荷の保存を表す式であることが分かります。このことは，閉曲面 S を無限大に大きくした場合を考えるとより明確になります。このとき，この式は，

$$\frac{dQ_T}{dt} = 0 \tag{3.108}$$

となり，全空間中にある全電荷の量 Q_T が時間的に変動しないという『**電荷の保存則**』そのものを表す式となります。

以上のことから，次の重要な事実に気がつきます。

４元形式のマックスウェル方程式は，それ自身の中に電荷の保存則を内包している。

次に，この結論を踏まえて，アインシュタイン方程式とエネルギー・運動量保存則の関係について考えて行きましょう。

3.7.2 エネルギー・運動量テンソル

先ず，ミンコフスキー空間における

$$T^{ij}{}_{,j} = 0 \tag{3.109}$$

の意味について考えましょう。

連続の式の場合と同様に，閉曲面 S で囲まれたある領域でこの式を体積積分して，ガウスの法則を適用します。結果として

$$\frac{dp^i}{dt} + \int_S T^{i\alpha} dS_\alpha = 0 \tag{3.110}$$

が得られるでしょう。ここで，左辺の第2項は，ガウスの法則により体積積分を面積分に変換して面素片ベクトル dS_α を用いて書いたものです。また，第1項は，体積素片を dV とすると

$$\int T^{0i} dV = cp^i \tag{3.111}$$

となるため，4元運動量 p^i を用いて書いたものです。

ところで，$p^i = (\frac{E}{c},\ \vec{p})$ であることに注意して，(3.110) を成分毎に書き表すと次の2種類の保存則が得られることが分かります。

$$-\frac{dE}{dt} = \int_S cT^{0\alpha} dS_\alpha \tag{3.112}$$

$$-\frac{dp^\alpha}{dt} = \int_S T^{\alpha\beta} dS_\beta \tag{3.113}$$

この最初の式は，S で囲まれた領域内のエネルギーの減少する割合が，1秒間に S を通って出て行くエネルギーの量に等しいことを表しています。また第2式は，同じ領域内の運動量の減少の割合が，1秒間に S を通って出て行く運動量に等しいことを示しています。

これらのことから，T^{ij} の各成分は，次の量を表していることが分かります。

(1) $W \equiv T^{00}$ は，エネルギー密度
(2) $\vec{S} \equiv (cT^{01},\ cT^{02},\ cT^{03})$ は，エネルギーの流れの密度 (energy flux density)
(3) $\sigma_{\alpha\beta} \equiv T^{\alpha\beta}$ は，運動量の流れの密度 (momentum flux density)（応力テンソル）

以上まとめて行列で書き表すと次のように成ります。,

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} W & \frac{S_x}{c} & \frac{S_y}{c} & \frac{S_z}{c} \\ \frac{S_x}{c} & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \frac{S_y}{c} & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \frac{S_z}{c} & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{3.114}$$

曲がった空間（擬リーマン空間）でのエネルギー・運動量保存則は，平坦な場合の自然な拡張として，次のように書かれます。

$$T^{ij}{}_{;j} = T^{ij}{}_{,j} + \Gamma^i{}_{jk}T^{kj} + \Gamma^j{}_{jk}T^{ik} = 0 \tag{3.115}$$

ここで改めて，アインシュタイン方程式 (3.105) について考えて見ましょう，

(3.105) の両辺の共変発散を取ります。このとき，右辺は上述の保存則のために 0 となります。従って，左辺も 0 となることが要求されますが，先に見たようにビアンキ恒等式 (3.103) によりこれは保証されています。逆に言えば，電磁気学の場合のように，エネルギー・運動量保存則を内在するように方程式の左辺（時空の曲がりを表す項）に 2 つの量 R_{ij} と R とを組み合わせたアインシュタイン テンソルが採用されたと言えます。

■アインシュタイン方程式の一般形 エネルギー・運動量保存則に矛盾しないことのみを前提とするなら，アインシュタイン方程式 (3.105) の左辺としては，更に次のメトリックに比例する項を付け加えることが許されます。

$$R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R - \Lambda g^{ij} = \kappa T^{ij} \tag{3.116}$$

ここで，Λ は任意の定数であることができます。

この拡張されたアインシュタイン方程式の追加項は，静的な宇宙を記述するために必要な項としてアインシュタイン自身により導入されましたが，膨張宇宙の発見により撤回されました。しかし，現在の観測はこの存在を支持しているように見えます。ともあれ，これについての記述は『相対論と宇宙』の章に譲ることにします。

3.7.3 種々の例

以下に，エネルギー・運動量テンソルの具体例を挙げておきます。

■N 個の点粒子の集まり　この系の分布は離散的であるため，不連続関数を連続的に扱うためにディラックのデルタ関数を用いる必要があります。今，粒子が $\vec{r}_a$ $(a = 1, 2, \cdots, N)$ に点在していて，各々 $\vec{p}_a$ の運動量で運動しているとすると，この系の 4 元運動量密度は

$$T^{0\alpha} = \sum_{a=1}^{N} \frac{c{p_a}^{\alpha}}{\sqrt{-g}} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_a) \tag{3.117}$$

と書き表されます。そしてこのとき，運動量の流れの密度を表す $T^{\alpha\beta}$ は，これに個々の粒子の速度 ${v_a}^{\alpha} \equiv \frac{d{r_a}^{\alpha}}{dt}$ を入れ込んで

$$T^{\alpha\beta} = \sum_{a=1}^{N} \frac{c{p_a}^{\alpha}}{\sqrt{-g}} \frac{dr_a^{\beta}}{dt} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_a) \tag{3.118}$$

と書かれます。 そして更に，この式は，速度 ${v_a}^{\alpha}$ が，${v_a}^{\alpha} = \frac{c^2 {p_a}^{\alpha}}{E_a}$ と表されることに注意すると，次のような α と β について対称な形

$$T^{\alpha\beta} = \sum_{a=1}^{N} \frac{c^3 {p_a}^{\alpha} {p_a}^{\beta}}{\sqrt{-g} E_a} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_a) \tag{3.119}$$

に書くことができることが分かります。

■完全流体　粘性のない理想的な完全流体のエネルギー・運動量テンソル T^{ij} は，すべての流体粒子が静止しているような特別な基準系では 4 元速度 (2.193) が $u^i = (c, 0, 0, 0)$ となるため

(1) $T^{00} = \rho$　(エネルギー密度)
(2) $T^{\alpha 0} = 0$　(運動量密度)
(3) $T^{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta}$　(粘性がなく，圧力は等方的)

となります。従って，流体粒子が 4 元速度 u^i で運動しているより一般な基準系では

$$T^{ij} = (p + \rho) \frac{u^i u^j}{c^2} - p\eta^{ij} \tag{3.120}$$

と表されることが分かります。そしてこれを，一般座標変換に対して不変な形で書くと

$$T^{ij} = (p + \rho) \frac{u^i u^j}{c^2} - pg^{ij} \tag{3.121}$$

となります。

一般に，ベクトルやテンソルといった量は，平坦空間から曲がった空間への移行に際して，ローレンツ変換から一般座標変換へと自然な拡張がなされますが，それらを表す記号は，適宜変更する必要があります[*34]。ここでは，T^{ij} と u^i については拡張後も同じ記号を用いていますが，メトリックについてはミンコフスキー計量 η^{ij} から一般的な g^{ij} へと変更しています。また，ここでは陽には現れていませんが，普通の微分 (,) も共変微分 (;) に置き換える必要があります。

■電磁場　電磁場の場合，エネルギー・運動量テンソルは以下の式で表されます。

$$T^i{}_j = -F^{ik}F_{jk} + \frac{1}{4}\delta^i{}_j F^{kl}F_{kl} \tag{3.122}$$

この内訳は，次の通りです。

- $W \equiv T^{00} = \frac{1}{2}(\frac{\vec{E}^2}{c^2} + \vec{B}^2)$　(電磁場のエネルギー密度)
- $S^\alpha \equiv cT^\alpha{}_0 = \vec{E} \times \vec{B}$　(ポインティング (Poynting) ベクトル:単位時間当りに単位断面を抜け出すエネルギーの流れ)
- $\sigma_{\alpha\beta} \equiv T^{\alpha\beta}$　(運動量の流れの密度:（マックスウェルの応力テンソル）:x^β 軸に垂直な単位断面を 単位時間に x^α 方向に抜けて行く運動量の流れ)

3.8 座標条件

節 §3.5.5 において，空間の曲率を表すリーマンテンソル R_{ijkl} は，それが有する色々な対称性のために独立な成分の数は 20 個になることを見て来ました。これに伴いそれを一回縮約したリッチテンソル R_{ij} も 2 つの添字の交換に対しての対称性を持つためその数は 10 個となります。従って，アインシュタイン方程式の独立な成分の数は，10 個であることが分かります。

一方，方程式の未知量，つまり積分して求める量は，時空を表現する計量テンソル g_{ij} ですが，この独立な成分の数も 10 個です。従って，この量は計算上は過不足無くアインシュタイン方程式から決定されることになります。

しかしながら，一般座標変換によって，アインシュタイン方程式は全体としては不変

[*34] 相対論的量子力学（場の理論）で現れるディラック方程式に従うスピノール（つまりディラック方程式の解）は，一般座標変換に対して定義されません。従って，曲がった空間で扱う場合には，その空間の各点における接空間（平坦空間）において考えることが必要です。

ですが，これを構成する未知量の計量テンソル g_{ij} は，

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j}g_{kl} \tag{3.123}$$

と変換します。言い換えると，未知量としての計量テンソルには，アインシュタイン方程式によっては決定されない4つの自由さ（任意性）があることになります。同様の自由さを電磁気学のマックスウェル方程式の中にも見出すことができます。先にこれについて簡単に復習してから進むことにしましょう。

3.8.1　ローレンツ条件

マックスウェル方程式の第1の組み (2.1) は，次の2種類のポテンシャル φ と $\vec{A}$ を導入すると恒等的に満たされます。

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{3.124}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{3.125}$$

このとき，電磁場テンソル (2.209) は，これらの関係を，次の**4元ベクトル ポテンシャル**

$$A^i = (\frac{\varphi}{c},\ \vec{A}) \tag{3.126}$$

を導入して書き直すことによって，

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \tag{3.127}$$

と書くことができることが分かります。この式から F_{ij} は，明らかに

$$A_i \longrightarrow A_i + \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \tag{3.128}$$

の置き換えに対して不変であることが分かります。ただし，Φ は任意の x^i の関数です。

従って，F_{ij} のみで書かれたマックスウェル方程式もこの変換に対しての不変性を持つことになります。このことは，言い換えれば，マックスウェル方程式のみでは，A^i を一意的に決定することができないことを意味しています。このため，色々な補助的な条件がケースバイケースで考えられて来ましたが，中でも次のものは，ローレンツ変換に対して不変であるためローレンツ条件として知られて来た代表的なものです。

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = 0 \tag{3.129}$$

因に，この条件の下に，マックスウェル方程式の第 2 組 (2.223) は，A^i によって

$$\Box A^i = -\mu_0 j^i$$

と単純な形に書くことができるようになります。

3.8.2 調和条件

アインシュタイン方程式に話を戻しましょう。

この節の初めに述べたように，アインシュタイン方程式のみでは一意的に計量テンソルを決定することはできません。このため，ケースバイケースであるにせよ何らかの補助条件が必要です。次の条件は，電磁気学におけるローレンツ条件に匹敵する有用な条件として知られています。

$$g^{jk}\Gamma^i{}_{jk} \equiv \Gamma^i = 0 \tag{3.130}$$

この条件を満たす座標系 x'^i へは，次の式を解くことに依って，扱っている $\Gamma^i \neq 0$ の座標系 x^i からいつでも移ることができます（問 3.8.2.1 を参照して下さい）。

$$g^{jk}\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\Gamma^j \tag{3.131}$$

このような座標系 x'^i は，次の調和関数の満たす方程式を満たすという意味で**調和座標** (harmonic coordinates) と呼ばれています：

$$\Box x'^i \equiv g^{jk}D_j D_k x'^i = g^{jk}x'^i{}_{,jk} - \Gamma^\ell x'^i{}_{,\ell} = 0 \tag{3.132}$$

扱っている座標系が，調和座標であるか否かは，条件 $\Gamma^i = 0$ を計量テンソルを用いて具体的に書いた式から得られる次の条件によって判定できます。

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\right) = 0 \tag{3.133}$$

ここで，$g \equiv -\det(g_{ij})$ と置いていることに注意してください。因みに，重力場が無い場合のミンコフスキー空間におけるミンコフスキー座標 (ct, x, y, z) は明らかに上式を満たすため調和座標と言えます。

問 3.8.2.1　クリストッフェル記号 $\Gamma^i{}_{jk}$ の変換式 (3.76) を用いることによって，(3.130) を求めなさい。

問 3.8.2.2　g^{ij} は g_{ij} の逆行列であるため，$g^{ij} = -\frac{\Delta^{ij}}{g}$ が成り立つこと，および，行列式の微分から $g_{,i} = -g_{km,i}\Delta^{km}$ が成り立つことを利用して，調和条件 $\Gamma^i = 0$ より，(3.133) を導きなさい。ただし，Δ^{ij} は，$\det(g_{km})$ の (ij) 余因子です。

3.9　測地線

ニュートン力学では物体の運動は，運動方程式を解けば良かったのですが，アインシュタイン方程式 (3.105) は，重力源がその周りに作る重力場を記述する時空を与えてくれるだけでこれだけで物体の運動を議論することはできません。ではどのようにして小物体や光の運動を記述すればよいのでしょうか[*35]。

相対論では重力は時空の曲がりとして昇華されたためもはや重力はありません。 有るのは曲がった時空のみです。そこではもはや何らの力も働いていないため，この空間の中に入った小物体や光は，**"真直ぐに"** 運動しようとします。じっと静止することも許されません[*36]。

ここで，"真直ぐな" とは，もちろん文字通りではなくこの空間に於ける "直線"，つまりその線がこの線上の任意の隣接する２点を結ぶその空間の "最短線" を指しています[*37]。因みに，そういった曲線は，測地学の測地線に対応していることから**測地線**と呼ばれています。

重力源の天体の作る時空内に入った小物体や光は，この時空内の対応する測地線に沿って運動することになります。このとき，これらの測地線を決める方程式には，運動している側の質量は含まれないことに注意して下さい。もちろん，このことは，質量を持たない光の場合には自明でしょう[*38]。しかし，質量を有する小物体と光子のように質量を持たない粒子とでは，その測地線は質的に異なります 。特に，後者に属する測地線は，**光の測地線**とかヌル測地線とか呼ばれていて時空の構造を解明する上

*35 このテキストで扱う粒子や小物体は，特に断らない限り自分が作る重力場，つまり自分自身による時空の曲がりが無視できるという意味での**テスト**粒子や物体を指すことにします。しかしながら，テスト物体の質量が大きく成ってそれが作る時空が重力源の作る時空に影響を与える程になるとここでの議論は修正なしでは使えないことに注意してください。

*36 時空は時間と空間の連続体で，中に時間軸も含まれることに注意して下さい。空間的に静止していても時間軸に沿っては動いています。

*37 実際には，時空が擬リーマン空間であるため最短ではなく最長となります。しかし，最長線というのもイメージが悪いので "最短線" として扱います。

*38 現在，無質量の粒子として知られているのは光子のみです。

で重量な役割を演じています[39]。

ところで，ユークリッド空間の中の測地線，これは文字通りの直線ですが，無数に有ります。これら全てを生み出す微分方程式を考えて見て下さい。それがこの空間の**測地線の方程式**です。この解の与える無数の直線から，適当な条件（例えばこの点とあの点を通るといった条件）を付けて目的の直線を見つけ出すことができます。

ユークリッド空間では測地線の方程式は1種類ですが，物理空間である擬リーマン空間では，時空の構造を反映して，**時間的，空間的，光（ヌル）的の３種類の測地線**に対応する方程式があります。ここでは時間的と光的の２種類のみを扱いますが，以下にこれら３種類について簡単にまとめておきます。

■時間的測地線　小物体の上の住人にとっては，小物体は静止しているため，その（擬）リーマン空間内での軌道はその住人の時間，つまり小物体の**固有時間**のみで記述されることは明らかでしょう。一方，ミンコフスキー空間の場合の自然な拡張として**『この時空における４次元距離も絶対量（不変量，或いはスカラー量）である』**という事実を認めると，この小物体が（擬）リーマン空間内に描く“軌道”の長さは，観測者にも，また彼らが選ぶ時計や座標系にも依らないことになります。従って，小物体の軌道は，（擬）リーマン空間内の一つの時間的測地線として記述されると結論できるでしょう。

言い換えると，時間的測地線上の隣接する任意の２点間の４次元距離 ds は，一般の観測者からは時間と空間とが入り交じった表現 $ds = \sqrt{g_{ij}dx^i dx^j}$ となり，一方，小物体の住人のような“静止系”の観測者にとっては，この系の時間 $d\tau$ のみによる $ds = cd\tau$ という表現になります。そして，これら両者は，値としては同じであるため，この場合の ds は，時間のみで表現できる基準系が存在すると言う意味において**“時間的”**と言うことができます。

■光的測地線　光の軌道の場合に固有時間が存在しないことは，速い乗り物に乗ると時間はゆっくり進み，その速さが増すにつれて増々ゆっくりと進むようになるという特殊相対論の結論を思い起こせば十分でしょう。これに従うと，最高速である光の速さで運動することができれば時間は全く経たないことになります。この事実に，時間的測地線の場合と同様，『この時空における４次元距離は観測者に関係なく同じ』という事実とを合わせて考えると**光の測地線に沿っては４次元距離は常に０**となることが分かります。

[39] 後に扱うシュワルツシルド時空の構造の解明のために色々な座標系が提案されてきましたが，その内で，有望視されているクルスカル座標系は光の測地線に着目したものと看做すことができます。

■空間的測地線　ここでは取り扱いませんが，空間的測地線についても一言記しておきます。空間的な測地線で記述される粒子がもし存在すれば，それは光速を越える速さで運動する粒子に対応します。故に，明らかにそのような粒子の存在は，相対論に矛盾します。ところで，相対論，特に，特殊相対論は，その直接的な予測の実験による検証や，それに基づいて確立された数々の理論による予測の実験に依る検証などを通じて今や確立された理論と言えます。このことから，光速を越える粒子は存在しないか，もし存在するとしても相対論に矛盾しない形である必要があると考えるのが自然でしょう。現在のところ，幸か不幸かそのような粒子の存在は確認されていません*40。

3.9.1　測地線の方程式

上に述べた理由で，与えられた重力場の中を運動する小物体や光子を記述する運動方程式は，曲がった時空内の該当する測地線を決める方程式になります。この節では，これら小物体と光の運動を記述する測地線の方程式を作ることにしましょう。

先に述べた様に測地線は 3 次元ユークリッド空間（E_3 と略記します）に於いては直線です。故に，この E_3 空間では測地線の方程式は

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0 \tag{3.134}$$

となります。ここで，t は時間と考えてよいのですが，数学的には直線を表す単なる一つのパラメータです。3 次元リーマン空間は，その曲率がすべての場所で 0 となる特殊な場合として E_3 を含むために，(3.134) の自然な拡張として直ちに次の式に導かれます。

$$\frac{D^2x^\mu}{dt^2} = 0, \qquad \text{ただし } \mu = 1, 2, 3 \tag{3.135}$$

ここで，x^μ は $\vec{r}$ の拡張です。また，$\frac{D}{dt}$ は普通の微分 $\frac{d}{dt}$ の拡張で，この空間での共変微分を表す演算記号（演算子）です。更にこの式を拡張して，4 次元の擬リーマン空間の場合に対応する式を導出することができます。

手順は次の通りです。

[1] **平坦時空**

平坦なミンコフスキー空間では，自由な小物体や光子は直線軌道を描いて運動

*40 一時，**ニュートリノ**が光速を越えるという実験結果が出て新聞でも話題になりましたが，その後の検証でその結果は誤りであったことが判明したことはまだ記憶に新しいことでしょう。

するため，それらの測地線の方程式は次の直線を与える方程式になります。

$$\frac{du^i}{d\tau} = 0, \qquad \text{ただし } i = 0, 1, 2, 3 \tag{3.136}$$

ここで，$u^i = \frac{dx^i}{d\tau}$ は物体，または光子の４元速度です*41 。また，τ は，それらの軌道を表現することができるパラメータで，物体の場合は固有時間を，また光子の場合は適切に選んだ不変量（スカラー量）を表しているとします。

[2] **曲がった時空**

一般に，曲がった時空での方程式は，平坦な場合の対応する方程式の微分を，この空間での共変微分で置き換えるという形式的な手順を経て直ちに得ることができます。今の場合，(3.136) において，微分 du^i を，対応する共変微分 Du^i で置き換えれば直ちに目的の方程式が得られます。

$$\frac{Du^i}{d\tau} = 0 \tag{3.137}$$

因に，この方程式は，(3.88) を用いると

$$\boxed{\frac{du^i}{d\tau} + \Gamma^i{}_{jk} u^j u^k = 0} \tag{3.138}$$

と書き下されます。

3.10　変分法

節 §3.9.1 とは別の方法による測地線の方程式の導出方法について考えて見ましょう。

前小節では，測地線の方程式を，扱っている空間の「直線の方程式」として得ましたが，ここでは，「直線」を空間の任意の２点を結ぶ“最短線”と考え，“最短”を数学的に表現することによって得られることを示すことにします*42。この目的に適す

---

*41 光子の場合は，粒子の場合のように４元速度は定義されないことに注意して下さい。従って，光子の場合は，４元速度の代わりに４元波数ベクトルを用いた方が妥当でしょうが，ここでは，軌道を問題にしているため，τ として適切な不変量が選ばれているとの前提の下に，同様な扱いをすることにします。

*42 “最短線”とはユークリッド的な表現です。前節の冒頭での注でも述べた通り，ミンコフスキー空間および それを局所的にもつ擬リーマン空間では，最長線になることに注意して下さい。ここでも直感的にイメージし易いため敢えて用いています。

る数学的ツールが変分法です。この方法について説明しましょう*43。

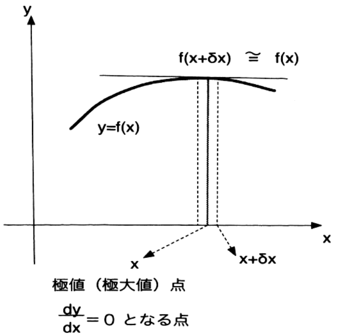


図 3.11　**1 変数関数 $y = f(x)$ の極値条件**

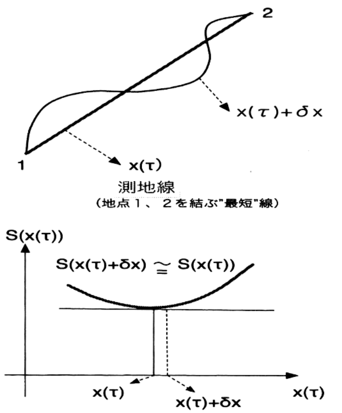


図 3.12　**汎関数 $S(x^\mu(\tau))$ の極値条件**

測地線は，その線上の 2 点を結ぶ“最短線”を連ねたものなので，まず擬リーマン空間内の 2 点“1”と“2”を結ぶ曲線 $x^i(\tau)$ を変数としたその曲線の長さ

$$S[x^i(\tau)] = \int_{\text{“1”}}^{\text{“2”}} ds \tag{3.139}$$

を考えます。ここで，$S[x^i(\tau)]$ は，汎関数，つまりパラメータ τ の関数としての経路を変数に持つ関数を表しています。

次に，求める測地線を $x^i(\tau)$ として，これから僅かにズレた曲線 $x^i(\tau) + \delta x^i(\tau)$ の点“1”,“2”間の長さからこの測地線の長さを引いたもの

$$S[x^i + \delta x^i] - S[x^i(\tau)] \tag{3.140}$$

で，この最も大きい項 δS（これは，第一変分と呼ばれます）のみを考え，これを 0 とおきます。これが，$S[x^i(\tau)]$ が“最短線”，つまり測地線であることの数学的表現になります（図 3.12 を参照して下さい）

*43 ここでの説明は，解析力学の知識がなくても，数学の“**変分法**”，つまり汎関数：関数を変数として持つ関数の極値条件の知識があれば十分です。その場合，ここで現れるラグランジアン $\mathcal{L}$ は後述の (3.142) を単にそう呼ぶと思えば良いでしょう。

3.10.1 ラグランジアン

擬リーマン空間における線素 ds は，一般に

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \equiv \mathcal{L}\, d\tau^2 \tag{3.141}$$

と書かれます。この式の右辺の τ は，質量を持ったテスト粒子の場合には，その固有時[*44]を，また光などのように質量を持たない粒子に対しては，（光の固有時は存在しないため）適当に選んだアフィパラメータを表しているとします。そして，このとき，右辺が $\mathcal{L}$ の定義になります：

$$\mathcal{L} \equiv g_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} \tag{3.142}$$

この $\mathcal{L}$ を解析力学で馴染みのラグランジアン (Lagrangian) と解釈すると，測地線の方程式を求めるという問題は，**最小作用の原理**を通して運動方程式を導出するという力学の問題に帰着されます。

3.10.2 オイラー・ラグランジュ方程式

$$\delta S[x^i(\tau)] = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\mathcal{L}}\, d\tau \tag{3.143}$$

の変分を具体的に実行してみましょう。

パラメータ τ の値が τ_1 から τ_2 の間で，“最短”の長さの軌道を x^i として，これから少しだけ外れた軌道を $x^i + \delta x^i$ と仮定して，その長さの差を考えます。ただし，$\delta x^i(\tau_1) = \delta x^i(\tau_2) = 0$ とします。

$$S[x^i + \delta x^i] - S[x^i] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\sqrt{\mathcal{L}(x^i + \delta x^i, \dot{x}^i + \delta\dot{x}^i)} - \sqrt{\mathcal{L}(x^i, \dot{x}^i)}\right] d\tau \tag{3.144}$$

この式の両辺の 1 次の無限小（第 1 変分）までで考えると，テイラー展開により次の結果が導かれるでしょう。

$$\delta S = \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i}\delta\dot{x}^i\right) d\tau \tag{3.145}$$

[*44] 特に固有時でなくても，一般には**アフィンパラメータ**と呼ばれるラグランジアン $\mathcal{L}$ が一定となるパラメータであればオーケーですが，固有時が選べる場合には，これを用いるのが普通です。固有時を用いる一つのメリットは，$ds^2 = c^2 d\tau^2$ となる基準系を選べるため，(3.141) より $\mathcal{L} = c^2$ となることです。

ここで，$\mathcal{L}$ が定数となるアフィンパラメータが τ として選ばれているとすると，$\frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}}}$ は積分から外に出すことができ，また，$\delta\dot{x}^i = \frac{d\delta x^i}{d\tau}$ であることに注意すると，これは

$$\delta S = \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{L}}}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i}\right)\right]\delta x^i d\tau + \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{L}}}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i}\delta x^i\right]_{\tau_1}^{\tau_2} \tag{3.146}$$

と変形されます。そして，仮定により右辺の第 2 項は 0 で，また“最短”条件（数学的には極値条件）により，任意の δx^i に対して $\delta S = 0$ となることが要求されるため，最終的に，この式から，次の**オイラー・ラググランジュ方程式** と呼ばれている方程式に導かれます。

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i} \qquad (i = 0, 1, 2, 3) \tag{3.147}$$

この式に，具体的に与えられたラグランジアン (3.142) を代入することによって (3.138) と同じ測地線の方程式

$$\frac{D^2x^i}{D\tau^2} \equiv \frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i{}_{jk}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau} = 0 \tag{3.148}$$

が得られます。

上に見たように，現時点では，変分法による方法は，単にラグランジアンによる解析力学的手法の正当性を示すだけのもののように思われるかも知れませんが，しかし，この方法に依るメリットは具体的な問題を解くときにより明白になるでしょう。因みに，後の節 §4.2 で述べる例は，この良い一例となるでしょう。

3.11　弱場近似

先に進む前に，重力が弱い場合を想定して，ニュートン理論との関係について見ておくことにしましょう。この目的のために，単純化して次の仮定を置いて考えます。

(1) 重力場は時間変動しない（静的である）。
(2) 重力は弱く，その中に置かれた物体の速さは，光の速さと比較してずっと遅い。
(3) 第 1 近似では，物体の運動は力学で記述できる。

これらの仮定の下に，次の設定が可能になります。

[1] 重力は，ほとんど物体の質量分布 (密度 μ) によってのみ産み出されると考えられる。故に，エネルギー・運動量テンソルは

$$T^{00} = \mu c^2, \qquad \text{他の成分} \sim 0 \tag{3.149}$$

と近似できる。

[2] 重力は弱いため，それを表現する時空の曲りも小さいと考えられる。従って，メトリックテンソルは，

$$g_{ij} = \eta_{ij} + f_{ij} \tag{3.150}$$

と置くことができる*45。ただし，η_{ij} は，曲りのない“平坦”な時空，つまりミンコフスキー空間の計量テンソルで，f_{ij} は2次の項を無視できるほどに小さい量であるとする*46。

以上の前提の下に，次の式が導かれます。

$$g^{ij} = \eta^{ij} - f^{ij}, \quad \text{ただし，} f^{ij} \equiv \eta^{ik}\eta^{jm}f_{km} \tag{3.151}$$

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2}\eta^{il}(f_{lk,j} + f_{jl,k} - f_{jk,l}) \tag{3.152}$$

$$R_{ij} = \Gamma^k{}_{ij,k} - \Gamma^k{}_{ik,j} \tag{3.153}$$

3.11.1 ポアッソン方程式

(3.151)〜(3.153) を考慮すると，弱い重力場を表現する方程式として，ニュートン力学で馴染みの次のポアッソンの方程式

$$\Delta f^{00} = \kappa\mu c^2 \tag{3.154}$$

を導くことができます。以下にその導出の手順を示すことにしましょう。

先ず，アインシュタイン方程式 (3.105) を次のように書き直します。

$$R^{ij} = \kappa\left(T^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}T\right) \tag{3.155}$$

ここで，T はエネルギー・運動量テンソル T^{ij} のトレース，つまり

$$T = g_{ij}T^{ij} = \mu c^2 + f_{00}\mu c^2$$

*45 同じ近似で反変メトリック テンソル g^{ij} は，$f^{ij} \equiv \eta^{i\ell}\eta^{jk}f_{\ell k}$ とすると，$g^{i\ell}g_{\ell j} = \delta^i_j$ より，$g^{ij} = \eta^{ij} - f^{ij}$ となります。

*46 以下の議論では f について2次以上の項は全て無視します。

です。このとき，(3.155) の (00) 成分は，f について 2 次以上の項を無視すると次のようになります。

$$R^{00} = \frac{\kappa}{2}\mu c^2$$

この左辺 R^{00} は，仮定により f_{ij} が時間に依存しないため，同じ近似で (3.153) より

$$R^{00} = \eta^{00}\eta^{00}R_{00} = \frac{1}{2}\Delta f^{00} \tag{3.156}$$

となります。以上の結果に，$\eta^{00} = 1$，および $f^{00} = f_{00}$ を考慮することによって，方程式 (3.154) に到達することができます。もちろん，$\Delta = \sum_{\mu=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ はラプラシアンです。

3.11.2　測地線の方程式

この節で考えている近似で，測地線の方程式 (3.138) を考えてみましょう。

$$\frac{v}{c} \ll 1 \tag{3.157}$$

の仮定により，$d\tau \approx (1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2})dt \approx dt$ が成り立つため，

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \left(\frac{cdt}{d\tau},\ \frac{d\vec{r}}{d\tau}\right) \approx (c,\ \vec{v}) \tag{3.158}$$

が成り立ちます。そしてこのとき，クリストッフェル記号 (3.152) のすべての次数は同程度であるため，(3.138) において，左辺第 1 項の微分項を除いた最も大きな項（リーディングターム）は，$\Gamma^i{}_{00}(u^0)^2$ であることが分かります。従って，測地線の方程式はこのとき次式で近似できることになります[*47]。

$$\frac{du^\mu}{dt} + \Gamma^\mu{}_{00}c^2 = 0 \qquad (\mu = 1, 2, 3) \tag{3.159}$$

この式は，$\Gamma^\mu{}_{00}$ が (3.152) より

$$\Gamma^\mu{}_{00} = \frac{1}{2}f_{00,\mu} \tag{3.160}$$

となることに注意すると，次のように 3 次元ベクトルの形にまとめることができます。

---

*47 測地線の方程式の $i = 0$ 成分は，$u^0 = c$，$\Gamma^0{}_{00} = 0$ であるため自動的に満たされていることに注意して下さい。

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{c^2}{2}\nabla f_{00} \tag{3.161}$$

3.11.3 ニュートンの運動方程式

単位質量の物体が，ポテンシャル U の力場内を運動しているときに受ける力は，

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}\ U(= -\nabla U) \tag{3.162}$$

と表されるため，この物体に対するニュートンの運動方程式は

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla U \tag{3.163}$$

と書かれます。今，これと前小節の結果 (3.161) とを比較すると，ニュートンポテンシャル U と計量成分 f_{00} との間に次の関係が成り立つことが分かります。

$$U = \frac{1}{2}c^2 f_{00} \tag{3.164}$$

3.11.4 ニュートンポテンシャル

重力場を表すポテンシャル関数 U は，一般に次のポアッソン方程式に従うことが知られています。

$$\Delta U = 4\pi G\mu \tag{3.165}$$

ここで，μ は重力源となる物質の密度です。

この式を確認するためには，$\mu =$ 一定 か，$\mu(r)$ で分布している球対称物体を考えれば十分でしょう。例えば，半径 r の球対称物体を考え，この中心を原点とした座標系を設定してこの球の内部に渡って (3.165) を体積積分します：

$$\int \nabla\cdot\nabla U\ dV = 4\pi G\int \mu dV$$

次に，この左辺をガウスの定理を用いて球の表面積分に変換します。そして，球対称性の仮定によりこの球の表面上では U の値は同じであることを考慮すると，左辺は結局

$$\int \nabla U\cdot d\vec{S} = (\nabla U)_r\, 4\pi r^2$$

となることが分かります。一方，右辺は物体の全質量を M とすると $4\pi GM$ となるため，結局次の式に導かれます。

$$(\nabla U)_r = G\frac{M}{r^2}$$

これから，力 $\vec{F}$ は，今の場合

$$\vec{F} = -\nabla U = -G\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{3.166}$$

となることが結論されます。

3.12 アインシュタイン定数

(3.164) と (3.165) より

$$\Delta f_{00} = \frac{8\pi}{c^2}G\mu \tag{3.167}$$

が得られます。これと (3.154) とを比較すると直ちに次の関係が成り立つことが分かります。

$$\boxed{\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}} \tag{3.168}$$

従って，この κ，つまりアインシュタインの重力定数の値は，

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} = 2.075 \times 10^{-43} kg^{-1} m^{-1} s^2 \tag{3.169}$$

と計算されることが分かります。

第 4 章

相対論からのアプローチ

アインシュタイン方程式を用いると，物質やエネルギー分布などが与えられたとき，それらによってどのような時空が作られているかを理論的に予測することができます。例えば，特定の星が内外に作っている時空は，その星の物質分布などの情報が得られれば知ることができますが，その際例え，星の内部の正確な情報は分からないとしても，単純化したモデルを考えてその物質分布を仮定することによって，その星の内外の時空の様子を推測することが可能です。そうして得られた情報を合わせることによって，星の進化の問題，特に，白色矮星や中性子星，そしてブラックホールへと進む可能性のある星の分類などが，この方程式を用いて議論され成果を上げて来ました。

一方，ビッグバン以降の膨張宇宙の過去から未来についても，物質やエネルギー分布などについて簡単なモデルを通して一定のシナリオを描くことを可能にして来ました。実際，宇宙初期の物質分布を一種の完全流体と仮定することによって，その解を議論したフリードマンの宇宙モデルは，ガモフが相対論とは関係なく現在の物質の有り様を分析した結果として提唱したビッグバン宇宙論の定量的な説明の基盤を与えています。

宇宙論についての話題は後に譲り先ずは，このテキストでの主要なテーマでもあるアインシュタイン方程式の最初の厳密解であり，ブラックホールの存在についての初めての具体的な理論的根拠となったシュワルツシルド解について，その導出とその解が与える時空について見て行くことにしましょう。

4.1　シュワルツシルド解

アインシュタイン方程式は，上に述べたようにこれを解くことに依って，身近にある惑星の運動からブラックホールや宇宙の構造に至るまでの非常に豊富な情報を与えてくれますが，実際にこれを厳密に『解く』ことは非常に困難な作業を伴います。その困難さは，方程式自体の複雑さを別にすれば主に次の点にあります。

(1) 非線形方程式である。
(2) 座標系の設定
(3) 解の解釈

よく知られているように線形微分方程式は，線形独立な解を求めることができれば，一般の解はそれらの線形結合から求めることができますが，非線形方程式にはこのような特典がありません（知られていません）。従って，解は状況を適当に設定してケースバイケースで求めるしかありませんが，物理的に明確に状況が設定できる場合は限定されています[*1] 。しかも，アインシュタイ方程式は任意の基準系を許すため，例えある基準系の下である解が求められてもその解の与える時空の全貌をその解が与えているとは限りません。このような状況にあって，1919 年にシュワルツシルド (Schwarzschild) によって解かれた明確な意味を持ち，最も簡単に解くことができる厳密解について見て行くことにしましょう。

4.1.1　準備

シュワルツシルド解は，物質分布が球対称で静止した天体がその外側に作る時間と空間についての情報を与えてくれます[*2]。

その解の導出には，重力の源が『球対称に分布している』こと以外の天体内部の様子やその構造等に関しての情報は必要とされません。重力天体がその周りにどのような重力場（時空）を作っているかがその解を求める目的です。そのためその解は**外部**

[*1] 重力源が，静的で球対称な場合や軸対称である場合，またそれらの対称性を維持しつつ高速に回転している場合など，或はそれらが電界や磁界の源を有する場合などについての数種類の厳密解が知られているだけです。これらについては，このテキストでは扱いませんが，必要な情報は末尾に挙げた参考文献の中に得られるでしょう。

[*2] 太陽や地球は，自転していて，厳密には質量分布も球対称とは言えませんが，その回転速度は時空に影響する程に速くなく，遠方から見れば物質分布の凸凹も無視でき，十分に高い精度でそのような天体と考えることができるでしょう。

解とか**真空解**とか呼ばれています。

4.1.1.1 外部方程式

天体の外側は真空で，物質やエネルギー等の重力源が分布していないとすると，そこでの時空はアインシュタイン方程式 (3.105) において，$T^{ij}=0$ とおいた式を解くことによって知ることができます。従って，この場合の方程式は，次のように簡単になります。

$$R_{ij}=0 \tag{4.1}$$

因に，この式は次のようにすれば得られます。先ず，(3.105) において，$T^{ij}=0$ と置き

$$R_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}R=0$$

として，これに g^{ij} を掛けて和を取ると

$$R=0 \tag{4.2}$$

が得られるので，これを元の式に用いれば求める式となります。

4.1.1.2 基準系の設定

(4.1) を解くために先ず観測者を設定します。観測者として，対象とする重力天体からずっと遠く離れていて，またその他の天体からの影響も殆ど無視できる慣性観測者を想定して選ぶことにしましょう。このときもちろん，その観測者は，対象とする天体の周りの時空の位置を自身が自由に定めた座標系を用いて，またその時刻を自由に選んだ時計を用いて計ることができます。

具体的に進めましょう。今，その観測者が，対象とする天体の球対称性を考慮して，その中心を原点に置いた球極座標系 $(r,\ \theta,\ \phi)$ を座標系として，また時間座標を，ある一定のリズムで動く時計を選んでその読みをパラメータ t として採用したとします。このとき，求める時空の線素 ds の 2 乗は，次の形に書かれるでしょう[*3]。

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ij}dx^i dx^j \\ &= A(r)c^2dt^2-B(r)dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \end{aligned}$$

[*3] 一般の線素の形から，時空が静的で球対称であるということを考慮して，ここに挙げた形へと至る厳密な手順に興味のある読者は，例えば，文献 [6] などがお勧めです。

これにより，計量テンソル g_{ij} は，$x^i = (ct, r, \theta, \phi)$ とすると行列形で

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

と対角形に書かれることが分かります。ここに現れた2つの r のみの関数 $A(r), B(r)$ は，もちろんアインシュタイン方程式を解いて決められるものですが，現時点では未知量です[*4]。これらの量は，重力天体の球対称性と，それに近づけば近づくほど長さは短く，時間は遅れて行くであろうという推察の下に，平坦時空からのズレを表す因子として導入されたものです。もちろん，時空が平坦で曲がっていなければ，$A(r) = B(r) = 1$ となります。

$A(r), B(r)$ が求まると，座標 r の指す位置での座標時刻 t_1 から t_2 に対応する実際の時間経過（固有時間）は

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{A(r)}dt \tag{4.4}$$

により計算されます。また半径方向に沿って同一時刻 t で測り出した，r_1 から r_2 の間の距離 $r_2 - r_1$ に対応する実際の距離（固有長さ）は，

$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{B(r)}dr \tag{4.5}$$

により求められます。

4.1.2　方程式の導出と解

次に，(4.1) より $A(r), B(r)$ を求める方程式を導出して，これらを具体的に解く手順に進むことにしましょう[*5]。

[*4] 節 §3.8 で述べたように，アインシュタイン方程式からメトリックを一意的に決めるためには一般的には4個の補助条件が必要です。今の場合は，座標系を球対称に選んだことと，空間の時間変化がないように時間軸を設定するという特別の条件がこの条件に相当し，結局，今の場合の未知量は A, B の2つのみに絞られたと考えれば良いでしょう。

[*5] アインシュタイン方程式を導出するまでの手続きは，Mathematica とか Maple とか Maxima 等の数式処理ソフトを用いればほとんど自動でやってくれます。この中でも，Maxima は唯一フリーですが中々の優れものです。この簡単な紹介と使用例を付録に書いておきます。興味のある読者は参考にして下さい。

まず計量テンソル (4.3) の逆行列を計算して，反変計量テンソル g^{ij} を求めます。

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{A(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{B(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

次に，クリストッフェル記号 (3.74) を求めます。これはメトリック (4.3) とこの反変成分 (4.6) を用いて機械的に計算できます。その内の 0 でない成分は

$$\Gamma^i{}_{jk} = \begin{cases} \Gamma^t{}_{tr} = \frac{A'}{2A}, & \\ \Gamma^r{}_{tt} = \frac{A'}{2B}, & \Gamma^r{}_{rr} = \frac{B'}{2B} \\ \Gamma^r{}_{\theta\theta} = -\frac{r}{B}, & \Gamma^r{}_{\phi\phi} = -\frac{r\sin^2\theta}{B} \\ \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \frac{1}{r}, & \Gamma^\theta{}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta \\ \Gamma^\phi{}_{r\phi} = \frac{1}{r}, & \Gamma^\phi{}_{\theta\phi} = \cot\theta \end{cases} \tag{4.7}$$

となるでしょう。次に，これらの結果を用いてリーマンテンソル (3.82) を計算します。結果，0 以外の成分として

$$R^{ij}{}_{k\ell} = \begin{cases} R^{tr}{}_{tr} = \frac{A''}{2AB} - \frac{A'B'}{4AB^2} - \frac{A'^2}{4A^2B} \\ R^{t\theta}{}_{t\theta} = \frac{A'}{2rAB} = R^{t\phi}{}_{t\phi} \\ R^{r\theta}{}_{r\theta} = -\frac{B'}{2rB^2}, \quad R^{r\phi}{}_{r\phi} = -\frac{B'}{rB^2} \\ R^{\theta\phi}{}_{\theta\phi} = -\frac{B-1}{r^2B} \end{cases} \tag{4.8}$$

が得られるでしょう。最後に，これらからリッチテンソル R_{ij} を求めて，$R_{ij} = 0$ とすれば，次の 3 つの方程式が導かれるでしょう。

$$R^t{}_t = \frac{A''}{2AB} - \frac{A'B'}{4AB^2} - \frac{A'^2}{4A^2B} + 2\frac{A'}{2rAB} = 0 \tag{4.9}$$

$$R^r{}_r = \frac{A''}{2AB} - \frac{A'B'}{4AB^2} - \frac{A'^2}{4A^2B} - 2\frac{B'}{2rB^2} = 0 \tag{4.10}$$

$$R^\theta{}_\theta = R^\phi{}_\phi = \frac{A'}{2rAB} - \frac{B'}{2rB^2} - \frac{B-1}{r^2B} = 0 \tag{4.11}$$

未知量が 2 つであるため，もちろん，これら 3 式のすべてが独立ではありません。そのため，これらを組み合わせて，2 つの独立な式を求めます。具体的には (4.9)-(4.10)-2×(4.11) として，また (4.9-(4.10)) とすれば，次の 2 つの式が導かれるでしょう。

$$\frac{B'}{rB^2} + \frac{B-1}{r^2B} = 0 \tag{4.12}$$

$$\frac{dA}{A}+\frac{dB}{B}=0 \tag{4.13}$$

これらの式は容易に積分することができて，結果は次の形に書かれるでしょう。

$$A=\text{const.}\left(1-\frac{a}{r}\right)$$

$$B=\frac{1}{1-\frac{a}{r}}$$

ここで，a と const. は積分定数ですが，これらの内，const. の方は重力源からずっと離れると，時空は平坦になるという物理的要請のため

$$A\to 1,\qquad B\to 1\qquad (r\to\infty)$$

となる必要があるため，これを考慮して const. $=1$ と決まります。一方，a は，考えている重力天体に関係する量であると推測されますが，その決定については次の節で取り扱うとして，取り敢えずは，以上のことから静的で球対称なエネルギー・運動量分布を持つ重力天体は，その周りに次の形の線素で表される時空を作っていると結論されることが分かるでしょう。

$$ds^2=c^2\left(1-\frac{a}{r}\right)dt^2-\frac{dr^2}{1-\frac{a}{r}}-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \tag{4.14}$$

4.1.2.1　a の意味

シュワルツシルド解の導出において得た積分定数 a の意味について考えましょう。この目的のために，場が弱い，つまり時空の曲がりが小さい場合を考えます。この場合，ニュートン近似の節で得た (3.154) 式が成り立ちますが，この式の f^{00} は，今やシュワルツシルド計量 (4.14) により

$$g_{00}=1-\frac{a}{r}$$

となるため，$f_{00}=-\frac{a}{r}$，従って $f^{00}=\eta^{00}\eta^{00}f_{00}=-\frac{a}{r}$ となることが分かります。

こうして得た式

$$\nabla\cdot\nabla\left(-\frac{a}{r}\right)=\kappa\mu c^2$$

を，重力天体のニュートン的な意味での質量を M，つまり $M\equiv\int\mu d^3x$ として，天体全体を含む半径 r の球の内部について体積積分します。これにより

$$\int \nabla \cdot \nabla \left(-\frac{a}{r}\right) d^3x = \kappa M c^2$$

が得られます。更に，この左辺は，ガウスの定理を用いると

$$\int \nabla \left(-\frac{a}{r}\right) \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{a}{r}\right) = 4\pi a$$

となるため，結局これと右辺とにより a として次の結果が導かれます。

$$a = \frac{\kappa M c^2}{4\pi} = \frac{2GM}{c^2} \tag{4.15}$$

ここで，(3.168) の結果を用いたことに注意して下さい。

これからも明らかなように，積分定数 a は長さの次元を持つ量で，一般に**シュワルツシルド半径**と呼ばれています。次節で，a の値を具体的な重力天体について計算して見ましょう。

4.1.3 種々のシュワルツシルド半径

重力天体以外の情報でここで必要な定数の値は次の通りです。

$$G = 6.67 \times 10^{-11} Nm^2kg^{-2}$$
$$c = 2.998 \times 10^8 ms^{-1}$$

これらを用いて，我々の太陽や地球や中性子星などについて計算すると次の表 4.1 の様になります。

	太陽	地球	シリウス B	PSR B1919+21
質量 kg	1.99×10^{30}	5.98×10^{24}	1.95×10^{30}	$\sim 2.79 \times 10^{30}$
半径 km	6.96×10^5	6378	5.5×10^3	~ 9.74
a[km]	2.96	8.92×10^{-6}	2.90	~ 4.14

表 4.1 **色々な天体のシュワルツシルド半径** シリウス B は白色矮星でシリウスの伴星。PSR B1919+21 は最初に発見されたパルサー（中性子星）

この結果から，ここで挙げた太陽や地球の場合には，その値はそれらの天体の半径より遙かに小さく，それらを構成する物質の中に埋もれていることが分かります。

ところで，シュワルツシルド半径がその特異な意味を持つのは，重力源の天体がその半径より大きく，シュワルツシルド半径より小さい真空の領域を持つ場合です。このような重力の源の分布がシュワルツシルド半径の内側の領域に集中している天体がいわゆる**ブラックホール**です。次節ではこのような天体が生み出す時空の構造について見て行くことにしましょう。

4.2 時空構造

節 §3.10 で述べた変分法による手法を用いて考えることにしましょう。

ここで扱うラグランジアンは，(3.142) と (4.14) により

$$\mathcal{L} = c^2(1-\frac{a}{r})\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1-\frac{a}{r}} - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) = c^2\epsilon \qquad (4.16)$$

となります。ここで，文字の上のドット $(\cdot)$ は，固有時間 τ についての微分を表しています[*6]。また，ϵ は，小物体の場合は 1，光の場合は 0 の定数とします。

4.2.1 事象の地平面

シュワルツシルドの解 (4.14) は，$r = a$ において，計量テンソルの成分 g_{tt} が 0 になり，g_{rr} が発散します。これは，重力天体の半径が $r = a$ より大きい場合には，前提に依りこの解は天体の外 (真空) においてのみ成り立つため問題とはなりません。しかし，そうでない場合には，この解の $r = a$ での特異性とその内側の空間について，それがどのような意味を持つものかを調査する必要があります。

この目的のために，重力天体を構成するエネルギーや物質分布等が中心 O に集中している場合を想定して，そこから $r = r_i (r_i > a)$ の位置より小さな物体を自由落下させたときのその運動について考えることにしましょう[*7]。

[*6] τ については節 §3.10.1 を参照して下さい。

[*7] 以後，小さい物体の“小さい”はそれ自身による時空の曲がりが背景の時空に対して小さく無視でき，またその広がりも無視できる**テスト物体**を意味するものとします。

4.2.1.1 テスト物体の自由落下運動

小物体の運動は，明らかに半径方向に沿うため，(4.16) において $d\theta = d\phi = 0$ と置いて得られるラグランジアン

$$\mathcal{L} = c^2 = c^2(1 - \frac{a}{r})\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{a}{r}} \tag{4.17}$$

によって記述されます。

解析力学では，ラグランジアンに含まれない座標（循環座標）に対応する運動量は保存することが示されています[*8]。

今の場合， 座標 t は $\mathcal{L}$ に陽に含まれていないため，循環座標で，従って，対応する"運動量"(実体はエネルギー) は保存することが分かります。この保存量を $2c^2E$ とすると，$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}} = 2c^2E$ より

$$\dot{t} \equiv \frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{1 - \frac{a}{r}} \tag{4.18}$$

なる式が導かれます。更に，これを (4.17) 式に代入して，$\mathcal{L} = c^2$ に注意すると，次の方程式に導かれます。

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{2MG}{r} - (1 - E^2)c^2 \tag{4.19}$$

ここで，(4.15) を用いたことに注意してください。

上記 2 つの『1 階の』微分方程式を解くことによってテスト物体の軌道が求まります。これを以下の手順で進めましょう。

先ず，最初の位置 $r = r_i$ では，$\left(\frac{dr}{d\tau}\right) = 0$ となることに注意して，(4.19) を用いて r_i を E で表します。

$$r_i = \frac{a}{1 - E^2} \tag{4.20}$$

次に，解法を容易にするために，r の代わりに次の新たな変数 η を導入します[*9]。

$$r = \frac{1}{2}\frac{a}{1 - E^2}(1 + \cos\eta) = r_i \cos^2\frac{\eta}{2} \tag{4.21}$$

---

*8 解析力学での座標と運動量は，正確には一般座標と一般運動量です。

*9 この変数 η は，r が r_i から 0 まで変化するとき，0 から π まで変化することに注意してください。

これにより，(4.19) 式は，$\frac{dr}{d\tau} = \frac{d\eta}{d\tau}\frac{dr}{d\eta}$ に注意すると

$$\frac{d\tau}{d\eta} = \pm\left(\frac{{r_i}^3}{8MG}\right)^{1/2}(1+\cos\eta)$$

と書き換えられます。そして，τ は η の増加と共に増加することに注意すると，これは直ちに積分できて次の結果に導かれます。

$$\tau = \left(\frac{{r_i}^3}{8MG}\right)^{1/2}(\eta+\sin\eta) \tag{4.22}$$

ここで，積分定数は $\eta = 0(r = r_i)$ のとき，$\tau = 0$ となるように 選んでいることに注意してください。

この (4.22) 式は，η の関数としてのテスト物体の時間（固有時間）を表しています[*10]。これによると物体が落下し始めて $(\eta = 0:\ r = r_i)$ 重力天体の中心 $(\eta = \pi:\ r = 0)$ に達するまでの固有時間は

$$\tau_o = \left(\frac{{r_i}^3}{8MG}\right)^{\frac{1}{2}}\pi \tag{4.23}$$

と有限であることが分かります 。

次に，座標時間 t と η の関係を求めましょう。この関係は

$$\frac{dt}{d\eta} = \frac{d\tau}{d\eta}\frac{dt}{d\tau} = E\left(\frac{{r_i}^3}{2MG}\right)^{1/2}\left[\cos^2\frac{\eta_H}{2} + \frac{1}{2}(1+\cos\eta) + \frac{\cos^4\frac{1}{2}\eta_H}{\cos^2\frac{1}{2}\eta - \cos^2\frac{1}{2}\eta_H}\right] \tag{4.24}$$

に注意して積分すると[*11]

$$t = E\left(\frac{{r_i}^3}{2MG}\right)^{1/2}\left[\frac{1}{2}(\eta+\sin\eta) + (1-E^2)\eta\right] + \frac{2MG}{c^3}\ln\left[\frac{\tan\frac{1}{2}\eta_H + \tan\frac{1}{2}\eta}{\tan\frac{1}{2}\eta_H - \tan\frac{1}{2}\eta}\right] \tag{4.25}$$

となることが分かります。ここで，η_H はシュワルツシルド半径 $r = a$ に対応する η の値です。

[*10] ここで云う固有時間は，テスト物体（ロケットなど）に乗った人の時計の読みを意味します。

[*11] 右辺の第3項目の積分は，例えば $\xi = \tan\frac{\eta}{2}$ と置けば容易にできます。

この (4.25) から，テスト物体が，最初の位置 $r = r_i(\eta = 0)$ からシュワルツシルド半径 $r = a(\eta = \eta_H)$ に達するまでに無限の座標時間 t を要することが分かります。図 4.1 はこの様子を示したものです。

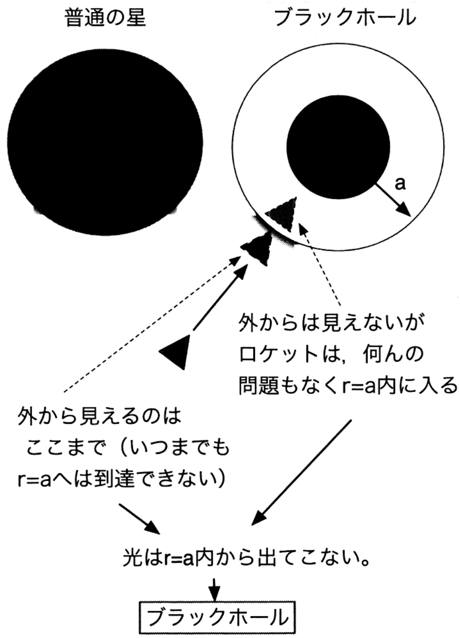


図 4.1　シュワルツシルド半径 $r = a$ の球面は，遠方の観測者からは特異な面に見える。

以上の結果から，座標時間 t を設定している遠方の観測者にとっては，$r = a$ は越えがたい特異性を持った特別な場所に見えますが，テスト物体に乗って重力天体に自由落下している観測者にとっては $r = a$ は何ら特別な場所ではなく，何の問題もなくこの場所を通って天体の中心に向かって有限の時間で落下して行くことが分かります。このことは，言い換えると，シュワルツシルド半径 $r = a$ を越えて中に入った物体は，遠方の観測者からは，決して見ることができないことを意味しています。この意味で，可視と不可視の境界面である $r = a$ は事象の地平面（イベントホライズン）と呼ばれています。

このように，遠方の観測者に対してのみ現れたこの特異性は本質的ではなく，基準系の選択によって現れた見かけ上のものと解釈できます。これに反して，$r = 0$ での

特異性は本質的です。シュワルツシルド解は，このように真の特異点が事象の地平面に覆われた，いわゆる『服を着た特異点』を持つことが分かります*12。

4.2.2　基準系の変更

シュワルツシルド解が与える時空 (シュワルツシルド時空) の全貌は，前節で見て来たように今まで用いてきた座標系（しばしばシュワルツシルド座標系と呼ばれます）では，シュワルツシルド半径における見かけ上の特異性のために，その外側から内側へと統一的に連続して記述することができません。このため，いろいろな基準系が提案されて来ました。その中でも，クルスカル・ゼェケレス (Kruskal-Szekeres) 座標として知られるものが一般のコンセンサスを得ていますが，その直接的な説明は，他書に譲るとして，ここでは，参考文献 [2] に従って，光の測地線を用いたアプローチでその概略を説明することにしましょう。そのために，シュワルツシルド半径 $r = a$ 付近で発した光の，半径方向に沿った運動について考えます。

光の軌道に沿っては，世界間隔 ds は，常に 0 なので，軌道の式は，(4.17) 式において $\mathcal{L} = c^2$ の代わりに $\mathcal{L} = 0$ と置くことによって得られます。

$$0 = c^2(1 - \frac{a}{r})dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{a}{r}} \tag{4.26}$$

この式から，次の２通りの方程式が得られます。

(1) 重力源の中心から外向きに進む光子（上昇する光子 ）に対して

$$cdt = \frac{dr}{1 - \frac{a}{r}} \tag{4.27}$$

(2) 中心に向かって落ち込んで行く光子（落下する光子）に対して

$$cdt = -\frac{dr}{1 - \frac{a}{r}} \tag{4.28}$$

これらの方程式は容易に積分できて，結果は次のように書くことができます。

(1) 上昇する光子に対して

$$ct = r + a\ln(r - a) - a\ln(aU^2) \tag{4.29}$$

*12 事象の地平面に囲まれていないいわゆる「裸の特異点」は現実には存在しないと考えられています（宇宙検閲官仮説（ペンローズ））

(2) 落下する光子に対して

$$-ct = r + a\ln(r-a) - a\ln(aV^2) \tag{4.30}$$

ここで, U, V は, 積分定数です。この各値に対応して一つの曲線, つまり $U=$ 一定値に対しては上昇する 1 つの光子の軌道が, また $V=$ 一定値 に対しては落下する 1 つの光子の軌道が対応します。

今, この自明な事実に着目して, U, V を $(r,\ t)$ に代わる新たな座標系 (Kruskal frame) と考え直すことにします。そのために先ず, 上の 2 式を U, V について解いて, その結果を

$$UV = e^{\frac{r}{a}}\left(\frac{r}{a} - 1\right)$$
$$\frac{V}{U} = e^{\frac{ct}{a}} \tag{4.31}$$

と書きます。

4.2.2.1 ブラックホールとホワイトホール？

(4.31) により, r 値と t 値をパラメータとして, 以下の点に注意して **UV-平面**にグラフを描くと図 4.2 のようになるでしょう。

(a) $r=0$ は, $UV=-1$ の双曲線に対応する。
(b) $r=a$ は, U 軸 $(V=0)$ と V 軸 $(U=0)$ に対応する。
(c) 上昇光子の軌道は, U=一定の V 軸に平行な直線である。
(d) 落下光子の軌道は, V=一定の U 軸に平行な直線である。

図 4.2 には, 事象の地平面 $r=a$ を通って未来の特異点 (future singularity) に落下して行く自由落下物体の軌跡と, 過去の特異点 (past singularity) から沸き出したかに見える上昇光子 (Rising photon) と, 未来の特異点に吸収されるように落下して行く落下光子 (Falling photon) と, $r>a$ でホバーリングしている物体の軌跡が描き込まれています。

参考

Kruskal-Szekeres 座標

クルスカル=ゼェケレス座標系は, 上の U,V 座標を適当にリラベル (例えば, $\tilde{u}=F(U), \tilde{v}=G(V)$ のような変換) して, 更に, 光的な座標から空間的, 時間的座標 u,v に変換して作られます。

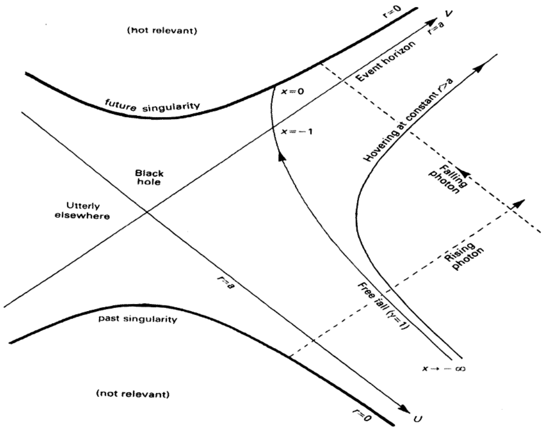


図 4.2 ブラックホールとホワイトホール? この図は参考文献 [2] から借用したもの。

図 4.3 は，シュワルツシルド時空が，つぎの計量として表されるように選んだ場合の座標系 $(u,\ v)$ の様子を表したものです[*13]。

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} (dv^2 - du^2) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{4.32}$$

ただし，$a = 2M$，$c = 1$ としています。

4.3 重力赤方偏移

重力物質[*14]がシュワルツシルド半径の外側まで広がっている太陽のような重力天体の表面 P から発せられた光のスペクトルが，ずっと離れた地点 Q で観測されたとき，赤方に偏っている現象について考えましょう。

先ず，地点 P（r_P）で座標時刻 t_P から $t_P + \Delta t_P$ の間に発せられた光が，地点 Q(r_Q) で t_Q から $t_Q + \Delta t_Q$ の間で観測されたとして，Δt_P と Δt_Q の間の関係を求めます。

---

*13 ここでの図と式は，参考文献 [12] より借用しています。

*14 重力を生み出すエネルギーや質量等を，以後は簡単にこう呼ぶことにします。

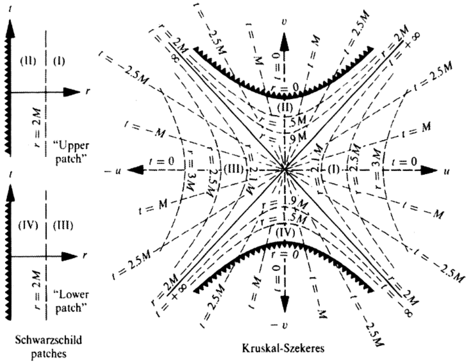


図 4.3 クルスカル・ゼェケレス座標系の様子

これには，$r_P < r_Q$ として，(4.29) より上昇光子の式

$$ct = r + a\log(r-a) + const._{+} \tag{4.33}$$

を用います。

(1) r_P で時刻 t_P に発せられた光子の軌道は，

$$c(t - t_P) = r - r_P + a\log\left(\frac{r-a}{r_P-a}\right) \tag{4.34}$$

と成るため，この光子が r_Q に達した時刻 t_Q は

$$c(t_Q - t_P) = r_Q - r_P + a\log\left(\frac{r_Q-a}{r_P-a}\right) \tag{4.35}$$

より求められます。同様に

(2) r_P から時刻 $t_P + \Delta t_P$ に発せられた光子の軌道は，

$$c(t - t_P - \Delta t_P) = r - r_P + a\log\left(\frac{r-a}{r_P-a}\right) \tag{4.36}$$

と成るため，この光子が r_Q に達した時刻 $t_Q + \Delta t_Q$ は

$$c(t_Q + \Delta t_Q - t_P - \Delta t_P) = r_Q - r_P + a\log\left(\frac{r_Q-a}{r_P-a}\right) \tag{4.37}$$

より求められます。

従って，(4.35) と (4.37) を用いると，直ちに次の結果が得られます。

$$\Delta t_P = \Delta t_Q \tag{4.38}$$

これは，P から Δt_P の時間の間に発せられた光子の数と同じ数の光子を，同じ時間 $\Delta t_Q(=\Delta t_P)$ の間に Q で受信したことを意味します。

他方で，地点 P に実際に時計を置いたとき，Δt_P の間にこの時計が刻んだ時間 $\Delta \tau_P$ は，(4.4) より

$$\Delta \tau_P = \int_{t_P}^{t_P+\Delta t_P} \sqrt{1-\frac{a}{r_P}}\, dt = \sqrt{1-\frac{a}{r_P}}\, \Delta t_P \tag{4.39}$$

となります。地点 Q でも同様にして

$$\Delta \tau_Q = \sqrt{1-\frac{a}{r_Q}}\, \Delta t_P \tag{4.40}$$

となります。ただし，前述の結論により $\Delta t_Q = \Delta t_P$ としていることに注意して下さい。

以上のことから以下の結論が導かれます。
振動数 f_0[Hz] の光を発する元素を，P に置いたとき，$\Delta \tau_P$ の間にそこで発せられた

$$\Delta \tau_P\ f_0 \tag{4.41}$$

個の光子を，Q では $\Delta \tau_Q$ の間に受信するため

$$f_Q = \frac{\Delta \tau_P\ f_0}{\Delta \tau_Q} = \sqrt{\frac{1-\frac{a}{r_P}}{1-\frac{a}{r_Q}}}\ f_0 \tag{4.42}$$

の振動数の光として受信されることになります。特に，$\frac{a}{r_p}$，$\frac{a}{r_Q} < 1$ が成り立つときは，この式は，次式で近似されます。

$$f_Q \approx \left(1+\frac{a}{2r_Q}-\frac{a}{2r_P}\right)\ f_0 \tag{4.43}$$

(4.42) を波長の関係に換算して見ましょう。このため先ず P,Q 地点での光の速さについて考えます。P,Q から半径方向に沿って外向きに伝わる光の速さは，遠方の観測者から見ると (4.29) によりそれぞれ

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_P = c\left(1-\frac{a}{r_P}\right), \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)_Q = c\left(1-\frac{a}{r_Q}\right) \tag{4.44}$$

となり，何れも c より遅く成っていますが，P,Q に置いた時計と物差しでは

$$\left(\frac{d\ell}{d\tau}\right)_{P,Q} = \frac{1}{1-\frac{a}{r_{P,Q}}}\left(\frac{dr}{dt}\right)_{P,Q} = c \tag{4.45}$$

となることが分かります。これに従って，振動数 f_0，f_Q を波長 λ_0，λ_Q に変換すると (4.42) より次の関係が導かれます。

$$\lambda_Q = \sqrt{\frac{1-\frac{a}{r_Q}}{1-\frac{a}{r_P}}}\,\lambda_0 \tag{4.46}$$

今，P に置いた光源から発せられた波長 λ_0 の光を Q 地点で観測したとすると，このときのレッドシフト z は，定義式 (2.111) により

$$z = \frac{\lambda_Q - \lambda_0}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1-\frac{a}{r_Q}}{1-\frac{a}{r_P}}} - 1 \tag{4.47}$$

と成ります。特に，$\frac{a}{r_p} < 1$，$\frac{a}{r_Q} \ll 1$ が成り立つときは，この式は次式で近似されることになります。

$$z \approx \frac{a}{2r_P} \tag{4.48}$$

この結果に依ると，太陽表面から放射された光を，地球で観測した場合のレッドシフトの予測値は，表 4.1 に上げたデータを用いると

$$z = \frac{2.96}{2\times 6.96\times 10^5} = 2.12\times 10^{-6} \tag{4.49}$$

と計算されます。この予測値を証明するための実験が 1931〜1948 年頃までに実際に成されたようですが，太陽面の活動の影響などによりこの値を特定することはできなかったようです[*15]。

4.4 測地線の方程式

次の節で，シュワルツシルド半径の外に置かれた小物体や光の軌道を詳しく調べるための準備として，ここではこれらの軌道を記述する一連の方程式を，解析力学の手法に従ってラグランジアン (4.16) から引き出しておくことにしましょう。

[*15] この部分についてのより詳しい説明は，参考文献 [10] を参照して下さい。

先ず，ラグランジアン (4.16) は，t と ϕ を陽に含んでいないことに注目しましょう。これにより，解析力学的には『これらに対応する一般運動量は保存する』ことが分かります。つまり，このとき，$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}=0$，$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=0$ となるため，オイラー・ラグランジュ方程式により

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}}=2c^2(1-\frac{a}{r})\dot{t}=const,\qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}=-2r^2\sin^2\theta\dot{\phi}=const$$

が成り立つことが分かります。一方，θ についての方程式は，オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}$$

を直接用いて

$$r^2\ddot{\theta}+2r\dot{r}\dot{\theta}=r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2$$

となることが分かります。この 2 階の微分方程式は $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta}=0$ と初期条件を設定すると全ての導関数が 0 となるため，$\theta=\frac{\pi}{2}$ を解に持つことが分かります。これは，つまり相対論においてもニュートンの場合と同じく，『運動は一平面（xy 面）内で行われる』ことを示しています[*16]。この事実を考慮に入れて上で得た式を書き直すと，次の式が得られます[*17]。

$$c^2(1-\frac{a}{r})\frac{dt}{d\tau}=\tilde{E}(\equiv const.) \tag{4.50}$$

$$r^2\frac{d\phi}{d\tau}=\ell(\equiv const.) \tag{4.51}$$

最後に残った r についての式は，上の結果と式 (4.16) とで $\dot{t}$ と $\dot{\phi}$ とを消去することにより，オイラー・ラグランジュ方程式を用いることなく導くことができます。

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\left(1-\frac{a}{r}\right)\left(c^2\epsilon+\frac{\ell^2}{r^2}\right)=\frac{\tilde{E}^2}{c^2} \tag{4.52}$$

[*16] ニュートン力学の場合は，このことは角運動量保存則から導かれましたね。

[*17] 本書の実験篇で用いた 3D シミュレーションプログラムの作成などでの用途のためには，運動面を xy 面，つまり $\theta=\frac{\pi}{2}$ に固定しない一般的な形での測地線の方程式を求めておく必要がありますが，この問題は，付録の第 C 章で取り扱います。

次に，ニュートン力学との対応を考えて，パラメータ τ から，座標時間 t への変換を考えましょう[*18]。これは 次の関係に注意すると容易になされます。

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{dr}{dt}\frac{\tilde{E}}{c^2(1-\frac{a}{r})},$$
$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\tau}\Big/\frac{dt}{d\tau}$$

結果は次のように成るでしょう。

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{c^4}{\tilde{E}^2 r^3}\left(1-\frac{a}{r}\right)^2 f(r) \tag{4.53}$$
$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\ell c^2}{\tilde{E}}\frac{1-\frac{a}{r}}{r^2} \tag{4.54}$$

ただし，$f(r)$ は次のように置いた r についての 3 次関数です。

$$f(r) = 2Er^3 + a\epsilon c^2 r^2 - \ell^2 r + a\ell^2 \tag{4.55}$$

また，E は，$\tilde{E}$ を

$$E \equiv \frac{c^2}{2}\left(\frac{\tilde{E}^2}{c^4} - \epsilon\right) \tag{4.56}$$

と置き直した定数です。

特に，時間発展ではなく軌道の形のみが問題であるなら，(4.54) を 2 乗して，これで (4.53) を割って得られる次の式がその目的に適うでしょう。

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{2E}{\ell^2}r^4 + \frac{a\epsilon c^2}{\ell^2}r^3 - r^2 + ar \tag{4.57}$$

これは，同様の考察によって，万有引力の法則とニュートン力学に基づいて得られた式 (1.26)

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{2\hat{E}}{\ell^2}r^4 + \frac{ac^2}{\ell^2}r^3 - r^2 \tag{4.58}$$

[*18] もちろん，力学との対応関係のあるのは，$\epsilon = 1$ の場合，つまり小物体の運動の場合だけです。光の場合には，τ には不変量でアフィンパラメータと云う以外に意味を与えていませんでしたが，何れの場合にもブラックホールの外側での軌道の問題を考える場合には，遠方の観測者の時計の方がよりイメージを描き易いでしょう。

に対応する相対論の式です。もちろん，これは $\epsilon = 1$ の小物体の場合での比較です。

次に，ニュートンの場合に倣って，軌道の分類を考えましょう。そのために，先ず慣習に従って $u = \frac{1}{r}$ と置いて，(4.57) を書き換えます。

結果は，次のように書かれるでしょう。

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \hat{E} - U_{eff}(u) \tag{4.59}$$

ここで，“有効ポテンシャル” $U_{eff}(u)$ と ℓ^2 と $\hat{E}$ とを次のように定義していることに注意して下さい。

$$U_{eff}(u) \equiv -au^3 + u^2 - \frac{\epsilon}{\kappa}u, \tag{4.60}$$

$$\ell^2 \equiv \kappa ac^2, \tag{4.61}$$

$$\hat{E} \equiv \frac{2E}{\ell^2} = \frac{2}{\kappa}\frac{E}{ac^2} \tag{4.62}$$

ただし，κ は ac^2 を単位とした ℓ^2 の値で，もちろん正の定数です。

4.5 粒子と光の軌道

適切な初期条件を設定することに依って，保存量 $\tilde{E}$ と ℓ^2 が，そして $\hat{E}$ が決まります。この $\hat{E}$ の値と式 (4.59) とに注目すると実際に方程式を解く前に，許された軌道の概略を知ることができます。この節では，この点に着目して相対論軌道のバラエティについて考えることにしましょう*19。

(4.59) の左辺は 0 または正に限られるため，可能な軌道は $\hat{E} \geq U_{eff}(u)$ を満たす領域に限られます。この点に注意して，以下，小物体や粒子の場合と，光の場合とで分けて考えることにします。

4.5.1 時間的測地線のバラエティ

先ず，$\epsilon = 1$ と置いたポテンシャル関数 (4.60) をその可能な形で分類します。これは，3 次方程式 $U_{eff}(u) = 0$ の実解の個数とこの関数の極値を考えることによって，次のように分類されることがわかります。

---

*19 ニュートン力学から予想される軌道に近い相対論軌道は，一般に**第 1 種軌道**と呼ばれています。これに対して，ニュートン力学に類を持たない相対論に固有な軌道は**第 2 種軌道**に分類されます。

(1) $0 < \kappa < 3a$ のとき，$u = 0$ に 1 個の実解を持ち，極値は取らない。

(2) $3a < \kappa < 4a$ のとき，　$u = 0$ での 1 個の実解のみで，$u_\pm \equiv \frac{1 \pm \sqrt{1-\frac{3a}{\kappa}}}{3a}$ で，それぞれ極大値 U_+ と極小値 U_- を取る。

(3) $\kappa = 3a$ のとき，　$u = 0$ での 1 個の実解のみで，変曲点を持つ。

(4) $\kappa = 4a$ のとき，$u = 0$ の他に，$u = \frac{1}{2a}$ で重解を持つ。$u = \frac{1}{6a}$ で極小値 $-\frac{1}{54a^2}$ を，$u = \frac{1}{2a}$ で極大値 0 を取る。

(5) $\kappa > 4a$ のとき，$u = 0$ の他に，2 つの実解をもつ。$u_\pm \equiv \frac{1 \pm \sqrt{1-\frac{3a}{\kappa}}}{3a}$ で，それぞれ極大値 U_+ と極小値 U_- を取る。

ただしここで，$U_\pm$ は，次のように定義しています。

$$U_\pm = -\frac{2}{9a\kappa}\left[\frac{3}{2} - \frac{\kappa}{3a} \mp \frac{\kappa}{3a}\left(1 - \frac{3a}{\kappa}\right)^{3/2}\right] \tag{4.63}$$

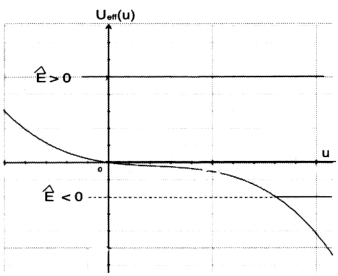


図 4.4　**0 < κ < 3a** の場合

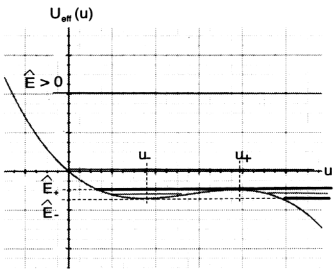


図 4.5　**3a < κ < 4a** の場合

図 4.4〜4.8 は，これらの様子を示したものです。これらの図で，$\hat{E}_\pm$ は，それぞれ極値点 $u_\pm$ に達し得る **"運動エネルギー"** $\hat{E}$ の値，つまり $\hat{E}_\pm = U_\pm$ で，これらの値を目安に軌道を分類することができます[*20]。しかし，その詳細は図を参考にして頂くとして，ここでは，次の点について記すに止めます。

[*20] E は，(4.56)（今の場合 $E = \frac{1}{2c^2}(\tilde{E}^2 - c^4)$）から分かるように，$\tilde{E}$ を全エネルギー，c^2 を単位質量の静止エネルギーと考えると運動エネルギーに相当する量と考えることができます。そのため，小天体や惑星などのように近似的にニュートン理論が成り立つ場合には，静止エネルギーの方が圧倒的に大きいためこれは負となります。しかし，光速近くで運動している超高速粒子などについては正となります。

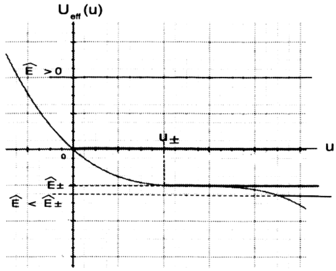


図 4.6　$\kappa = \mathbf{3a}$ の場合

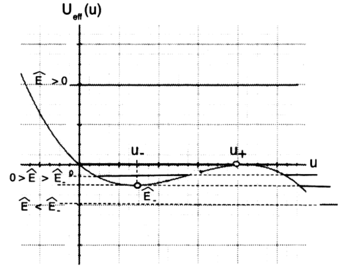


図 4.7　$\kappa = \mathbf{4a}$ の場合

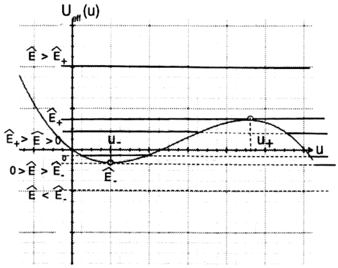


図 4.8　$\kappa > \mathbf{4a}$ の場合

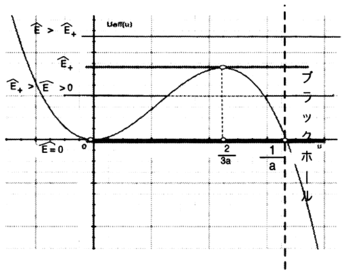


図 4.9　**光**の場合

(i) すべての可能な $\hat{E}$ の値に対して，ニュートンの場合にはない $u = \infty$ となる，つまりブラックホールへと落ち込んで行く軌道が存在する。

(ii) $\hat{E} = \hat{E}_{\pm}$ となる $\hat{E}$ の値のとき，u_- で安定円軌道が，u_+ でニュートンにはない不安定円軌道が存在する。

(iii) $\kappa > 4a$ の場合には，$\hat{E} > 0$ となる超高速粒子に対しても不安定円軌道が存在する。

(iv) ニュートンの場合と同じような，近日点 u_p と遠日点 u_a の間を行き来する軌道や，近日点から無限遠点に達する軌道が存在する。

以上は，軌道の概略です。実際の軌道がどのようになるかは，方程式 (4.59) を適切な初期条件の下に積分する必要がありますが，この積分は一般に，初等的には実行できないことが知られています。結果は，楕円積分の力を借りて表現することができ

ますが，ここでは代表的な例のみについて以下に記すことにします[*21]。

4.5.2 太陽の周りの惑星の軌道

時間的測地線の一例として，前節の (iv) の場合で，具体的には太陽の周りを運動する惑星を想定した軌道について見て行くことにしましょう。もちろん，惑星自身が作る時空の曲がりは無視します。

先に進む前に先ず，この軌道が可能な場合は，前節での考察により，κ と $\hat{E}$ が，次の条件を満たす場合のみであることに注意しましょう。

$$\kappa > 3a \tag{4.64}$$

$$\hat{E} < 0, \quad \text{かつ} \quad U_- < \hat{E} < U_+ \tag{4.65}$$

この前提の下に，方程式 (4.59) を次の形に書くことにしましょう。

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = au^3 - u^2 + \frac{1}{\kappa}u + \hat{E} \tag{4.66}$$

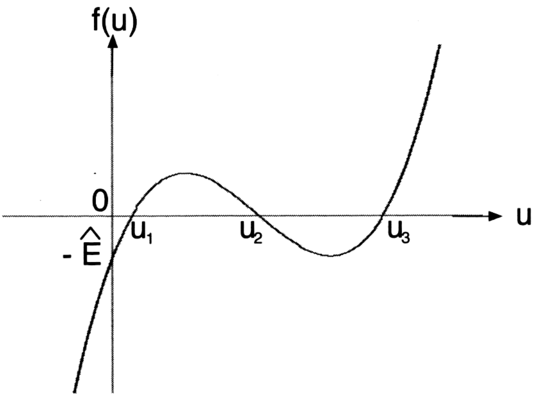


図 4.10 $f(u) = 0$ が 3 つの正の実解を与えるためには，κ と $\hat{E}$ は，(4.64) と (4.65) とを満たす必要がある。

*21 これらに関する詳細な解説が参考文献 [3] にあるので興味のある読者は参考にして下さい。

このとき，惑星の運動は，$\frac{du}{d\phi}=0$ となる r，つまり遠日点 $r_a=\frac{1}{u_1}$ と近日点 $r_p=\frac{1}{u_2}$ の間を行き来する運動であるため，(4.66) 式の右辺は，

$$f(u)\equiv a(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3) \tag{4.67}$$

と仮定できます。もちろん $u_i(i=1,2,3)$ は全て正の実数で，κ，$\hat{E}$ とは次の関係にあります。

$$u_1+u_2+u_3=\frac{1}{a} \tag{4.68}$$

$$u_1u_2+u_2u_3+u_3u_1=\frac{1}{a\kappa} \tag{4.69}$$

$$u_1u_2u_3=-\frac{\hat{E}}{a} \tag{4.70}$$

次に，方程式 (4.66) を解くために，古典論に習って

$$u=\frac{1}{p}(1+e\cos\chi) \tag{4.71}$$

と置くことにしましょう。ここで導入した新しい変数 χ は，これが ϕ に等しい時，古典論に一致することから，古典論からのズレを表す量として相対論的アノマリーと呼ばれています。また，p,e は，もちろん，それぞれ古典論の場合の半通径と離心率に対応する量です。

この置き換えにより，遠日点 r_a と近日点 r_p に対応する u_1，u_2 は，それぞれ次の様に表されます。

$$\chi=\pi \text{のとき}，\quad u_1=\frac{(1-e)}{p} \tag{4.72}$$

$$\chi=0 \text{ のとき}，\quad u_2=\frac{(1+e)}{p} \tag{4.73}$$

また，u_3 は，これらの式と，(4.68) とから，$u_3=\frac{1}{a}-\frac{2}{p}$ と書かれることが分かります。

これらの u_1，u_2，u_3 を，(4.67) へ代入し，また (4.71) を，(4.66) へ代入して整理することによって次の式に導かれます。

$$\pm\frac{d\chi}{d\phi}=\{1-(3-e)\mu\}^{1/2}\left(1-k^2\cos^2\frac{1}{2}\chi\right)^{1/2} \tag{4.74}$$

ここで，

$$\mu\equiv\frac{a}{p},\qquad k^2\equiv\frac{2\mu e}{1-(3-e)\mu}\ \leq 1 \tag{4.75}$$

と置いたことに注意して下さい。

微分方程式 (4.74) の解は，一般に Jacobi の楕円関数を用いて次のように表されます。

$$\phi = \frac{2}{(1-6\mu+2\mu e)^{1/2}} F(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\chi, k) \tag{4.76}$$

ここで，F は楕円関数で，次のように置いています。

$$F(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\chi, k) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\chi} \frac{d\gamma}{\sqrt{1-k^2\sin^2\gamma}}$$

この結果の導出において，積分定数を，$\chi = \pi$ のとき，即ち，惑星が太陽の遠日点を通過するとき，$\phi = 0$ となる様に，従って，$\chi : \pi \to 0$ のとき，$\phi : 0 \to \pi$ となるように設定しているため，常に $\frac{d\chi}{d\phi} < 0$ であることに注意して下さい。

以上のことから，太陽の周りを巡る惑星は，厳密には (4.71) と (4.76) によって記述される軌道上を運動すると結論されます。しかしながら，実際には，$p \gg e$ であるため次の節のような扱いに成るでしょう。



図 4.11　**近日点移動**

4.5.3 近日点移動

$\mu \ll 1$ の場合を考えましょう。このとき，(4.74) は，次のように簡単化されます。

$$\left(1+\frac{3}{2}\mu+\frac{1}{2}\mu e\cos\chi\right)d\chi=-d\phi \tag{4.77}$$

この式は，簡単に積分することができ，次の結果が得られます。

$$\left(1+\frac{3}{2}\mu\right)(\pi-\chi)-\frac{e\mu}{2}\sin\chi=\phi \tag{4.78}$$

ただしここで，積分定数は，$\chi=\pi$ のとき，$\phi=0$ となるように選んでいることに注意して下さい。

この結果と (4.71) とを合わせて描くと，図 4.11 のような図が描かれるでしょう。この図から，重力が強くなると惑星は，ニュートン力学の予測する楕円運動から離れて 1 周する毎に少しづつ遠日点（近日点）が移動する歳差運動をするようになることが分かります。実際にこの移動は，微小ですが，太陽を巡る惑星や小惑星についての長い間の観測により確認されて来ました。次の節でこの値を計算する公式について記すことにしましょう。

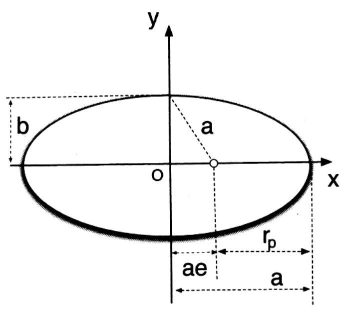


図 4.12 平均軌道半径 $\frac{r_a+r_p}{2}$ は，楕円の長半径 a に等しい。

4.5.3.1 近日点移動の計算

(4.78) より，惑星が太陽のまわりを 1 回転したとき，即ち，χ が π から 0，0 から $-\pi$ と変化したとき，その回転角 ϕ は，$2\pi+3\pi\mu$[rad] となると結論されます。この

ことは，惑星が，太陽のまわりを 1 回転して戻ってきたとき，その位置は，出発位置（今の場合は $\phi = 0$ の遠日点）から角度で

$$\frac{3 \times 2.96}{p} \times 180 \times 3600 \quad \text{秒角} \tag{4.79}$$

だけズレることを意味しています*22 。この現象は，**惑星の近日点移動**として知られている現象で，実際の水星の観測値と一般相対論による予測値との正確な一致から，一般相対論の正当性を示す有力な証拠と考えられて来ました。

次に，この値を太陽系の各惑星について具体的に計算する公式を導出して置きましょう。そのためには，惑星の基本データ（付録の表 A.1）から軌道の半長径 a，離心率 e の値を読み取り，半通経 p の値を計算する必要があります。

先ず，図 4.12 から半短径 b は，半長径 a と離心率 e とから

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \tag{4.80}$$

と表されることを読み取ります。そして，次の関係を求めます。

$$r_a + r_p = 2a \tag{4.81}$$

$$r_a - r_p = 2ae \tag{4.82}$$

$$r_a r_b = b^2 \tag{4.83}$$

最後に，これらの関係と (4.72) と (4.73) とから次の関係を導きます。

$$p = \frac{2}{u_1 + u_2} = \frac{b^2}{a} \tag{4.84}$$

$$e = \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \tag{4.85}$$

この p 値 (4.84) と (4.79) とを用いると，1 回転当たりのズレの角を 1 秒角の単位で求めることができます。次に，これを 1 世紀での値に換算するために，基本データから周期 T 年を読み取ります。これにより 1 年当たりの回転数を求めて，それを 100 倍します。

以上の結果をまとめると，求める公式は次のようになるでしょう。

$$\boxed{\frac{3 \times 2.96a}{b^2} \times 180 \times 3600 \times \frac{100}{T} \quad \text{秒角/世紀}} \tag{4.86}$$

---

*22 この式で，シュワルツシルド半径 a に，太陽の値 2.96km を用いていることに注意してください。

以下の表 4.2 は，主な（小）惑星についてこの公式を用いて計算した計算値を，その観測値と共にまとめたものです*23 。

表 4.2　近日点移動の観測値と予測値

(小) 惑星名	観測値（秒角／世紀）	予測値（秒角／世紀）
水星	43.11 ± 0.45	43.03
金星	8.4 ± 4.8	8.6
地球	5.0 ± 1.2	3.8
イカルス	9.8 ± 0.8	10.3

4.5.4　第2種軌道

ニュートン力学では予測されない相対論に固有な軌道の例を取り上げましょう。これはただ同じ方程式 (4.66) で初期設定（初期条件）を前節の場合から『中心天体に落ち込む』場合を実現する様に選ぶことによって実現されます。ここでは特に，保存量 κ と $\hat{E}$ とが，次の値を取る場合を考えることにしましょう。

$$\kappa > 3a \tag{4.87}$$

$$\hat{E} = U_- \tag{4.88}$$

ただし，U_- は，$U_{eff}(u)$ が $u = u_-$ で取る極小値 $U_{eff}(u_-)$ で (4.63) の下の式で与えられています。

このとき，(4.66) の右辺 $f(u)$ は，次の形に書かれます。

$$f(u) = a(u - u_-)^2(u - u_3) \tag{4.89}$$

ただし，u_3 は

$$u_3 = u_+ - u_- + \frac{1}{3a} = \frac{1}{3a}\left(1 + 2\sqrt{1 - \frac{3a}{\kappa}}\right) \tag{4.90}$$

と定義しています。図 4.13 は，これをグラフで示したものです。

*23 8つすべての惑星についての計算値は，付録の惑星データリスト A.1 にあります。

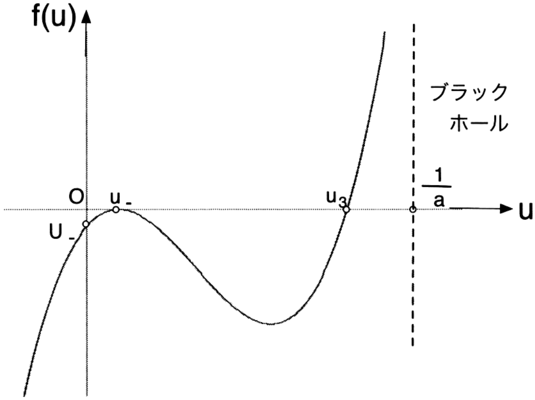


図 4.13　初期条件 $\kappa > 3a$，$\hat{E} = U_-$ での関数 $f(u)$

4.5.4.1　**軌道の式**

(4.66) を積分して，変数 ϕ が 0 から π まで変化するとき，u が u_3 から無限遠方に向かう軌道を求めましょう。

このとき，$u_- < u_3 \leq u$ に注意すると，(4.66) から次の式が得られます。

$$\int_{u_3}^{u} \frac{du}{(u-u_-)\sqrt{u-u_3}} = \sqrt{a}\int_0^{\phi} d\phi \tag{4.91}$$

この積分は，初等的に実行できます。先ず，$\sqrt{u-u_3} \equiv \xi$ と置いて計算し，その後更に，$\xi = \sqrt{u_3 - u_-}\tan\Theta$ と置くことによって，次の結果に導かれるでしょう。

$$u = u_3 + (u_3 - u_-)\frac{1-\cos\Phi}{1+\cos\Phi} \tag{4.92}$$

或いは，$r = \frac{1}{u}$ として

$$r = \frac{r_3 r_-(1+\cos\Phi)}{2r_- - r_3(1-\cos\Phi)} \tag{4.93}$$

ただし，

$$r_3 \equiv \frac{1}{u_3} = \frac{3a}{1+2\sqrt{1-\frac{3a}{\kappa}}} \tag{4.94}$$

$$r_- \equiv \frac{1}{u_-} = \frac{3a}{1-\sqrt{1-\frac{3a}{\kappa}}} \tag{4.95}$$

$$\Phi \equiv \sqrt{\frac{a(r_- - r_3)}{r_3 r_-}}\phi \tag{4.96}$$

と置いています。

これらの式を用いて

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \end{aligned} \tag{4.97}$$

とすることによって xy 平面内にグラフを描くことができます。図 4.14 は，この様子を表しています。

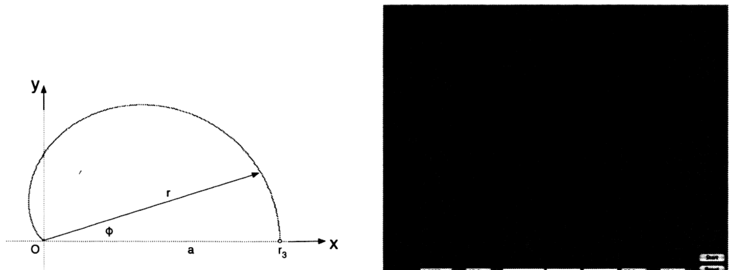


図 4.14　**ブラックホールに落下する物体**

4.5.5　重力に依る光の曲がり

光の軌道について考えましょう。

光についても，その概略は小物体の場合と同様に考えることができます。しかし，この場合のポテンシャル関数は，(4.60) において $\epsilon = 0$ と置くことによって得られる

$$U_{eff}(u) = -au^3 + u^2 \tag{4.98}$$

となります。また，エネルギー $\hat{E}$ も，

$$\hat{E} = \frac{1}{\kappa}\frac{\tilde{E}^2}{ac^4} \geq 0 \tag{4.99}$$

となるため，小物体の場合と違って 0，または正の値しか取れないことに注意する必要があります[*24]。

図 4.9 から分かるように，ポテンシャル関数 (4.98) は，$u = 0$ で極小値 0 を，$u_+ \equiv \frac{2}{3a}$ で，極大値 $U_{eff}(u_+) = \frac{4}{27a^2}$ を取ります。従って，$\hat{E}$ が

$$\hat{E} = \hat{E}_+ \equiv \frac{4}{27a^2} \tag{4.100}$$

の値を取るとき，$r = \frac{3a}{2}$ の半径の不安定円軌道を持つことが分かります。また，このエネルギー値 $\hat{E}_+$ を境にして，光の軌道のタイプは，次の 2 通りに大別されことが分かります。

(1) $\hat{E} < \hat{E}_+$ の場合，

[1a] 無限遠方に飛び去る。

[1b] ある地点までブラックホールに近づいた後，無限遠方に飛び去る。

[1c] ブラックホールに落ち込む。

[1d] ある地点までブラックホールから遠ざかった後，ブラックホールに落ち込む。

これらの相違は，光源の位置と放射の向きに依存しています。

(2) $\hat{E} > \hat{E}_+$ の場合，

[2a] 無限遠方に飛び去る。

[2b] ブラックホールに落ち込む。

これらの相違は，光源の位置に関係なく，放射の向きにのみ依存しています。

以上が，光の軌道の概略です。実際の軌道を知るためには，小物体の場合と同様，方程式 (4.59) を適切な初期条件の下に積分する必要があります。これは小物体の場合と違って初等的な積分操作に依って成すことができます。しかしながら，全体的な取り扱いは，他のテキスト（例えば参考文献 [3]）に譲り，ここでは，臨界的な $\hat{E} = \hat{E}_+ = \frac{4}{27a^2}$ の場合を取り上げて見て行くことにしましょう。

---

*24 $\hat{E} \equiv \frac{1}{D^2}$ と置くと，D は，(4.100) からも分かるように，a と同じ，つまり長さの次元を持つ定数で，散乱問題での衝突係数と同じ役割を演じることからこれを用いた説明も可能ですが，ここでは $\hat{E}$ のまま扱うことにします。

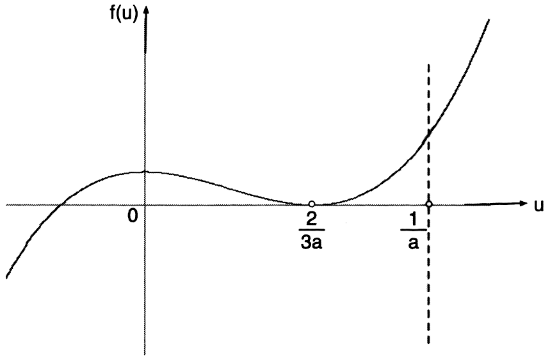


図 4.15　$r = \frac{3a}{2}$ の円軌道に近づく軌道とブラックホールへ落ち込む軌道の両方が存在します。

この場合，(4.59) の右辺は，

$$f(u) = a\left(u - \frac{2}{3a}\right)^2\left(u + \frac{1}{3a}\right) \tag{4.101}$$

となります。図 4.15 は，この様子を示したものです。

このとき，(4.59) から次の方程式が得られます。

$$\frac{du}{|u - \frac{2}{3a}|\sqrt{u + \frac{1}{3a}}} = \sqrt{a}d\phi \tag{4.102}$$

以下においてこの解を，2 つの場合に分けて考えましょう。

4.5.5.1　円に収束する光

$0 \leq u < \frac{2}{3a}$ の場合を考えましょう。このときの軌道の方程式の積分は，初期条件《$u = u_0$ $(0 \leq u_0 < \frac{2}{3a})$ のとき，$\phi = 0$》の下で，次のように成ります。

$$\int_{u_0}^{u} \frac{du}{(\frac{2}{3a} - u)\sqrt{u + \frac{1}{3a}}} = \sqrt{a}\int_0^{\phi} d\phi \tag{4.103}$$

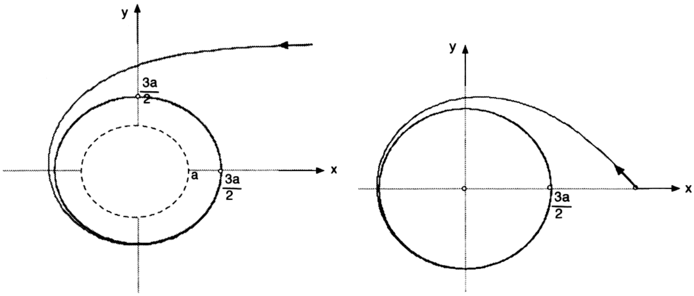


図 4.16 $r = \frac{3a}{2}$ の円軌道に収束する光の軌道。

この左辺の積分は，先ず $\sqrt{u + \frac{1}{3a}} = \xi$ と置いて整理後，更に $\xi = \frac{1}{\sqrt{a}} \tanh\Phi$ と置くことによって初等的に行うことができます。結果は，次のようになるでしょう。

$$u = \frac{1}{a}\left(\tanh^2\Phi - \frac{1}{3}\right) \tag{4.104}$$

ただし，$\Phi = \frac{\phi+\phi_0}{2}$ で，

$$\phi_0 = \log\left(\frac{4+\alpha+2\sqrt{3\alpha+3}}{2-\alpha}\right) \tag{4.105}$$

です。ここで，α は，$3a$ を単位に測った u_0 の値で $0 \le \alpha < 2$ を満たす定数です。この結果を，xy 平面内で描いたのが図 4.16 です。

4.5.5.2 a の 1.5 倍より内側で発せられた光

$\frac{2}{3a} < u < \infty$ の場合を考えましょう。このときの軌道の方程式の積分は，初期条件《$u = u_0$ のとき，$\phi = 0$》の下で，次のように成ります。

$$\int_{u_0}^{u} \frac{du}{(u-\frac{2}{3a})\sqrt{u+\frac{1}{3a}}} = \sqrt{a}\int_0^{\phi} d\phi \tag{4.106}$$

ただし，発光点 u_0 は，$\frac{2}{3a} < u_0 < \infty$ $(0 < r_0 < \frac{3a}{2})$ を満たす必要があります。左辺の積分は，先の場合と同様に，$\sqrt{u + \frac{1}{3a}} = \xi$ と置くと有理化できるため初等的に解くことができます。結果は，次のようにまとめられるでしょう。

$$u = -\frac{1}{3a} + \frac{1}{a\tanh^2\Phi} \tag{4.107}$$

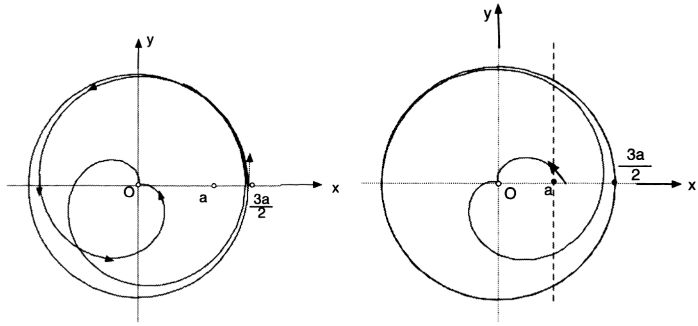


図 4.17　$r = \frac{3a}{2}$ より内側で発した光はすべてブラックホールに落下し，ブラックホールからの光はすべて $r = \frac{3a}{2}$ に収束。

或は，

$$r = \frac{3a \tanh^2 \Phi}{3 - \tanh^2 \Phi} \tag{4.108}$$

ここで，Φ は，次のように置いています。

$$\Phi \equiv \frac{\phi + \phi_0}{2}, \qquad \text{ただし，} \phi_0 = \log\left(\frac{\alpha + 4 - 2\sqrt{3(1+\alpha)}}{\alpha - 2}\right) \tag{4.109}$$

ただしここで，α は u_0 を $3a$ を単位にして表した $2 < \alpha$ を満たす定数です。

$$u_0 \equiv \frac{\alpha}{3a}, \text{ 又は，} r_0 = \frac{3a}{\alpha} \tag{4.110}$$

図 4.17 は，この様子を示したものです。

4.5.6　回避のコーン

ブラックホールの近くで放たれた光線は，基本的にはブラックホールに落ち込んで行くか，無限遠方に離れ去るかですが，唯一の例外が，上に見た $\hat{E}$ が (4.100) の $\hat{E}_+$ の値を取る場合です。このとき，光は $r = \frac{3a}{2}$ の場所で，次のような不安定な円軌道を取ることを前節で見てきました。

(1) その外側からやって来てこの円軌道に収束する（または，この円軌道から無限遠に離れ去る）軌道。

(2) この円軌道からブラックホールに落ち込んで行く（または，ブラックホールからこの円軌道に収束する）軌道。

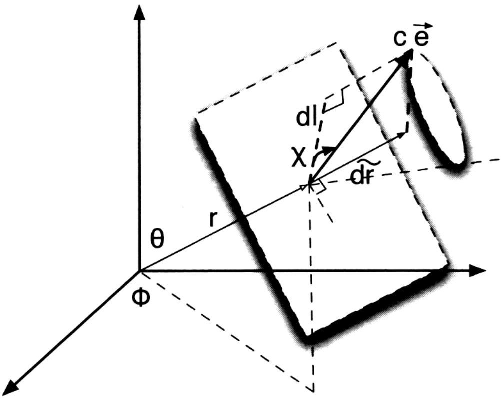


図 4.18 放射点 (r, θ, ϕ) で，半径 r の増加する向きから測った光の放射方向 $(\vec{e})$ の角が放射角 $\psi = \frac{\pi}{2} - \chi$。$\chi$ は $\vec{e}$ の $r =$ 一定の球面の放射点での接平面との成す角。

このように，$\hat{E}_+$ という $\hat{E}$ の値は，光がブラックホールに落ちるか落ちないかの境界を教えてくれる特別なエネルギー値と言えます。そのため，この事実を利用することによって，$r = \frac{3a}{2}$ の内外の任意の場所で任意の方向に放射した光線が，ブラックホールに落ちるか落ちないかの臨界の放射角 ψ_c を知ることができます。

一般に，(r, θ, ϕ) の位置の点光源から $\vec{e}$ 方向へ放射された光の放射角 ψ は，図 4.18 に基づいて次のようにして計算することができます。ただし，$\vec{e}$ は，放射方向の単位ベクトルです。

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \chi = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{d\tilde{r}}{d\ell}\right) \tag{4.111}$$

ここで，$d\tilde{r}$ と $d\ell$ は，光源の位置での固有の長さで，これらはシュワルツシルド時空の計量 (4.14) に基づいて

$$d\tilde{r} = \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{a}{r}}} \tag{4.112}$$

$$d\ell = r\sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2} \tag{4.113}$$

となります。従って，放射角 ψ は，次式によって計算されることが分かります。

$$\tan\psi = r\sqrt{1-\frac{a}{r}}\sqrt{\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2} \tag{4.114}$$

特に，$\theta = \frac{\pi}{2}$ と選んだときには，軌道面は xy 面と成るため

$$\tan\psi = r\sqrt{1-\frac{a}{r}}\sqrt{\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2}$$

となり，これに $\epsilon = 0$ と置いた (4.57) を用いると，

$$\tan\psi = \sqrt{\frac{r-a}{\hat{E}r^3 - r + a}} \tag{4.115}$$

が得られます。更にこれを，逆に $\hat{E}$ について解くと次式が得られます。

$$\hat{E} = \frac{r-a}{r^3}\frac{1}{\sin^2\psi} \tag{4.116}$$

この式から，ブラックホールから距離 r の所で ψ 方向に放射された光の $\hat{E}$ 値を知ることができます。

ところで，$\hat{E}$ の関数として放射角 ψ を与える (4.115) から，特に，$\hat{E} = \hat{E}_+ \equiv \frac{4}{27a^2}$ のときの臨界の放射角 ψ_c が，r のみの関数として

$$\tan\psi_c = \frac{\sqrt{\frac{r}{a}-1}}{(1-\frac{2r}{3a})\sqrt{1+\frac{r}{3a}}} \tag{4.117}$$

と表されることが分かります。図 4.19 は，この様子を示したものです。これから直ちに，$r = \frac{3a}{2}$ の位置で，$\psi_c = \frac{\pi}{2}$ となることが分かります。また，この図を参考にすると次のことが分かります。

(1) $1 \leq \frac{r}{a} \leq \frac{3}{2}$ の領域 I では，ψ_c は $0 \leq \psi_c \leq \frac{\pi}{2}$ にあり，

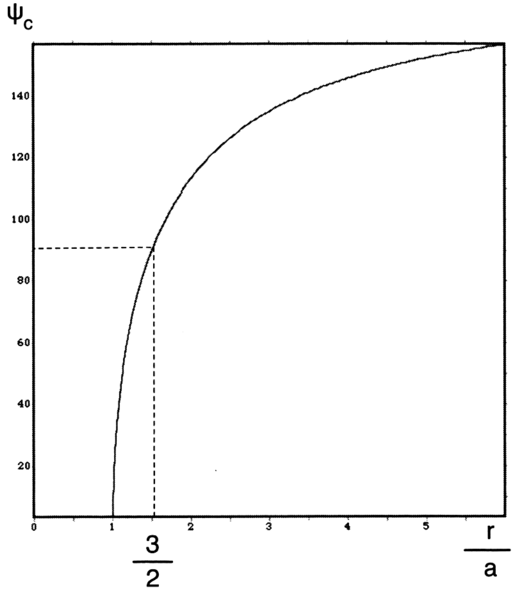


図 4.19　ブラックホールからの距離 $\frac{r}{a}$ と臨界の放射角 ψ_c との関係。横軸は $\frac{r}{a}$，縦軸は度 (°) で表した ψ_c

(2) $\frac{3}{2} < \frac{r}{a} < \infty$ の領域 II では，ψ_c は $\frac{\pi}{2} < \psi_c \leq \pi$ にあります。

図 4.20 は，これら領域 I,II での放射角 ψ_c（これを**回避角**と呼ぶことにします）の分布の様子を示したものです[*25]。

次に，この ψ_c が回避角と呼ばれる所以について考えて見ましょう。
このために，放射角 ψ の関数として $\hat{E}$ を与える (4.116) に注目して，これと，上の事実とを合わせて考えると，次の結論に達することが分かります。

(1) 領域 I 内で，$\psi_I > \psi_c$ の角度で放射された光は，$\sin\psi_I > \sin\psi_c$ に注意する

[*25] もちろん，$u = \frac{1}{a}$，つまり $r = a$ より内側の領域は，ブラックホールの内側になるため回避角としての意味は無くなります。

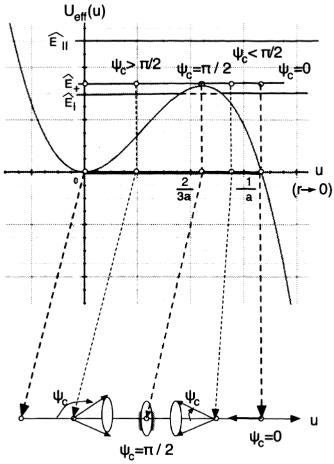


図 4.20　$\hat{E}(\psi)$ と回避角 ψ_c の関係

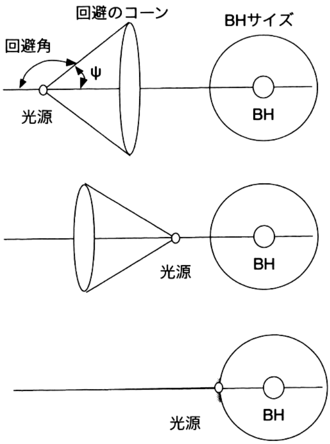


図 4.21　ブラックホール近傍での回避角 ψ_c の様子

と，$\hat{E}_I < \hat{E}_+$ と成るため，図 4.20 の $\hat{E}_I$ のラインに沿って一旦は，ブラックホールから離れても最終的にはブラックホールに落ち込んで行きます。

(2) 領域 II 内で，$\psi_{II} > \psi_c$ の角度で放射された光も，$\sin\psi_{II} < \sin\psi_c$ に注意すると，$\hat{E}_{II} > \hat{E}_+$ と成るため，図 4.20 の $\hat{E}_{II}$ のラインに沿ってブラックホールに落ち込んで行きます。

(3) 各領域で，ψ_c で放射された光は，すべて $u = \frac{2}{3a}(r = \frac{3a}{2})$ の不安定円軌道上にトラップされます。

(4) 各領域で，ψ_c より小さな角度で放射された光は，すべてブラックホールから離れて行きます。

第 5 章

相対論と宇宙

5.1 宇宙原理

ニュートン以来 200 年に亙る観測によって，我々の周辺の星は一様に分布しているのではなく，円盤状に集合していることが分かってきました。これ以降の宇宙原理に至る大まかな歴史は次の通りです。

- 1700 年後期：ハーシェル家の人々[*1]が，円盤構造を確認。しかし我々の太陽系はその中心にあるとした。
- 1900 年初頭：シャプレー[*2]は，我々の太陽系が円盤の中心から 3 分の 2 の所に位置していることを確認。しかし，我々の銀河系が宇宙の中心にあると考えた。
- 1952 年：バード[*3]は我々の銀河系が何も特別ではないことを示した。これから「宇宙は誰がどこから見ても同じに見える」。つまり，どの場所も宇宙の中心であるという宇宙原理[*4]が生まれた。
- 1990 年代：COBE 衛星による宇宙黒体輻射の観測によって，かなりの精度で一様等方性が確認された[*5]。

宇宙原理を積極的に取り入れるとどのような時空ができるのでしょうか。

[*1] Herschels

[*2] Shapley

[*3] Baade

[*4] これは，Copernican cosmological principle とも呼ばれています。

[*5] COBE は，ビッグバーンの残存輻射の温度分布を測定して，その分布が極めて均一であること示したと同時に，マイクロケルビンレベルでの僅かな非等方性があることも示した。

この章では，この宇宙原理を背景として構築された相対論的宇宙モデルについて見て行くことにしましょう。

5.2　一様で等方な空間

先ず，一様で等方的な空間について考えることにしましょう。このような空間は，その空間内の任意の 1 点を原点として極座標 $(r,\ \theta,\ \phi) \equiv x^\alpha (\alpha = 1, 2, 3)$ を設定すると，一般に次の形の計量テンソルで表現できるでしょう。

$$d\ell^2 = g(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \equiv g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \tag{5.1}$$

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} g(r) & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

反変計量テンソル $g^{\alpha\beta}$ は，この逆行列として

$$(g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{g(r)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

と表現されます。ここで，$g(r)$ は，r のみに依存する現時点では未知の関数です。以下はこれを決めるための手続きです。その手順は，§4.1 でのシュワルツシルド解を求めるときの手続きとほぼ同じです。

先ず，計量テンソル (5.2) と (5.3) とを用いて，3 次元のクリストッフェル記号を計算し，それから 3 次元リーマンテンソルを求め，更に，3 次元リッチテンソルを経由して 3 次元スカラー曲率を求めます。そして最後に，求めようとしている一様で等方的な空間を，このスカラー曲率が一定という条件から導き出します。

以下にその主だった結果のみを列挙することにします。導出に関心のある読者は，例えば，参考文献 [9] を参考にして自ら確かめることができるでしょう[*6]。

[*6] 付録 C で紹介する数式処理ソフト wxMaxima の ctensor パッケージを用いると，ここでのすべての結果は容易に確かめることができるでしょう。ただし，リーマンテンソルの定義がここでの定義と僅かに異なるため符号の相違に注意する必要があります。

5.2.1 3次元クリストッフェル記号

先ず，シュワルツシルドの場合と同様にして，(5.2) と (5.3) を用いて今の場合のクリストッフェル記号

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu})$$

を計算します。ここで，μ は，ダミー添え字で，ここでは 1 から 3 までの和を取っていることに注意して下さい。

以下は，この式を用いて具体的に計算して，0 でない成分のみを列挙したものです。

$$\begin{cases} \Gamma^{r}{}_{rr} = \frac{g'(r)}{2g(r)}, \quad \Gamma^{r}{}_{\theta\theta} = -\frac{r}{g(r)} \\ \Gamma^{r}{}_{\phi\phi} = -\frac{r\sin^2\theta}{g(r)}, \quad \Gamma^{\theta}{}_{r\theta} = \frac{1}{r} \\ \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^{\phi}{}_{r\phi} = \frac{1}{r} \\ \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} = \cot\theta \end{cases} \tag{5.4}$$

式中のプライム (') は r についての微分を表しています。

5.2.2 3次元リーマンテンソル

次に，これらの結果を用いてリーマンテンソル

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\delta\mu}\Gamma^{\delta}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\delta\nu}\Gamma^{\delta}{}_{\beta\mu} \tag{5.5}$$

を計算します。この定義式から，具体的に計算すると次の結果に導かれるでしょう。

$$\begin{cases} R^{r}{}_{\theta r\theta} = \frac{rg(r)'}{2g(r)^2}, \quad R^{r}{}_{\phi r\phi} = \frac{g(r)' r\sin^2\theta}{2g(r)^2} \\ R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi} = (1 - \frac{1}{g(r)})\sin^2\theta, \quad R^{\theta}{}_{r\theta r} = \frac{g(r)'}{2g(r)r} \\ R^{\phi}{}_{r\phi r} = \frac{g(r)'}{2rg(r)}, \quad R^{\phi}{}_{\theta\phi\theta} = 1 - \frac{1}{g(r)} \end{cases} \tag{5.6}$$

最後に，これらの結果から，リッチテンソル $R_{\alpha\beta}$ とスカラー曲率 R を求めます。以下に，結果のみを記します。

■3次元リッチテンソル

$$\begin{cases} R_{rr} = \frac{g(r)'}{rg(r)} \\ R_{\theta\theta} = 1 - \frac{1}{g(r)} + \frac{rg(r)'}{2g(r)^2} \\ R_{\phi\phi} = \frac{rg(r)'\sin^2\theta}{2g(r)^2} + (1 - \frac{1}{g(r)})\sin^2\theta \end{cases} \tag{5.7}$$

■3 次元スカラー曲率

$$R = \frac{2}{r^2}\left\{1 - \left(\frac{r}{g(r)}\right)'\right\} \tag{5.8}$$

5.2.3　定曲率空間

求める一様で等方的な空間について考えてみましょう。

ここで注意すべきは，探している空間は，その空間が，全体としてどのようになっているか，つまり宇宙の果てがどのようになっているかが問題ではなく，その空間内のどのような点，例えば地球，から見てもその周辺の空間が一様で等方的に見えるような空間はどのような空間かという点です。別の言い方をすれば，問題の空間は

『局所的（ローカル）に一様で等方な空間とはどのような空間か？』

となります。

このような空間は，2 次元，つまり面で考えると，どこまでも平坦な平面の他にも，球面などの一定の曲率を持った面なども容易にイメージできるでしょう[*7]。そしてその一般化として，求める空間を

局所的に一様かつ等方な空間 = 定曲率空間

としてイメージして進めばよいことが分かります。

上記の考察に従うと，(5.8) より

$$\frac{2}{r^2}\left\{1 - \left(\frac{r}{g}\right)'\right\} = C(\equiv \text{const.}) \tag{5.9}$$

なる微分方程式が得られます。これは簡単に積分できて次の結果に導かれるでしょう。

$$g(r) = \frac{1}{1 - \frac{C}{6}r^2 + \frac{const}{r}}$$

ここで，const. は積分定数です。これを決めるためには，次の事実に着目すれば十分でしょう。

[*7] 半径の異なる球面はどれも一様で等方で，定曲率です。しかし，その曲率（曲がり）は半径の小さな球面は大きく，半径が大きく成るに従って小さくなるというように，それぞれの曲率は異なります。因に，半径を無限大にした球面が曲率 0 の面，つまり平面ですね。また，この例から曲率=1/半径，つまり，**曲率の次元は長さの次元の逆**であることが分かるでしょう。

- 原点 $r=0$ は，この空間中のどこにでも選ぶことができる。
- 空間は一様であるため特異性は何処にも存在しない。

これらの事実から const.=0 でなければならないことが分かります。一方，曲率を表す定数として導入した C は，距離の 2 乗分の一の次元を持ち正負，または 0 の値を取り得る可能性を持った量です。今この代わりに，距離の次元をもつ正の定数 a と，0，または ± 1 の値を取ることができる定数 k を導入して $C \equiv \frac{6k}{a^2}$ と置くことにします。こうして，最終的に次の結果に導かれるでしょう。

$$g(r)=\frac{1}{1-\frac{kr^2}{a^2}} \tag{5.10}$$

以上の結果から，一様で等方的な宇宙の候補としては，k の値 ($k=\pm 1, 0$) に応じて，次の 3 種類のタイプのものが考えられることが分かります。

$$d\ell^2=\frac{1}{1-kr^2/a^2}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \qquad (k=\pm 1, 0) \tag{5.11}$$

次の節で，異なる k 値の空間の特徴について見て行くことにしましょう。

5.2.4 定曲率空間の種類

異なる k のそれぞれの空間の特徴を知るために，$r=$ 一定$, \theta=\frac{\pi}{2}$ として，各空間の中に描いた円について考えて見ましょう。

先ず，円周の長さを考えます。これは $d\ell = rd\phi$ より

$$\ell=\int_0^{2\pi} rd\phi = 2\pi r \tag{5.12}$$

となり，$k=0, \ \pm 1$ の何れの空間でも同じになります。

次に，半径を考えましょう。これは，$d\phi=0$ と置いて (5.11) から得られる

$$d\ell=\frac{dr'}{\sqrt{1-\frac{k}{a^2}r'^2}}$$

を r' について 0 から r まで積分することによって得られます。

$$\begin{cases} \ell = r \quad (\text{for } k=0) \\ \ell = a\sin^{-1}\frac{r}{a} \approx r+\frac{1}{6}\frac{r^3}{a^2} \quad (\text{for } k=1) \\ \ell = a\sinh^{-1}\frac{r}{a} \approx r-\frac{1}{6}\frac{r^3}{a^2} \quad (\text{for } k=-1) \end{cases} \tag{5.13}$$

ここで，近似式は $\frac{r}{a} < 1$ と仮定した場合です。 この仮定に依って，$r \ll a$ の領域では，どの k に対しても $\ell \approx r$ が成り立つことがわかります。図 5.1 は，異なる k と ℓ との関係を示したものです。

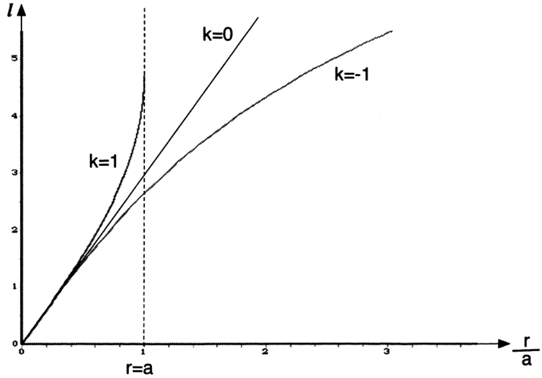


図 5.1　各 k 値と ℓ の関係

上の結果から次のことが結論されます。

(1) $k = 1$ のとき，$\sin(\frac{\ell}{a}) = \frac{r}{a}$ であるため,

$$\left|\sin\left(\frac{\ell}{a}\right)\right| \leq 1 \to r \leq a$$

つまり座標半径 r の取り得る値の範囲は，a を越えることができず有限です[*8]。つまり，この場合の空間は，観測者にとっては，半径 $r = a$ の球の内側の**閉じた空間**ということができます。

(2) $k = -1$ のとき， $\sinh(\frac{\ell}{a}) = \frac{r}{a}$ となるため，座標半径 r はいくらでも大きな値を取ることができます。この意味で，この空間は**開いた空間**ということができます。

(3) $k = 0$ のとき，この空間も座標半径 r に何らの制限もつかないため，開いた空間ということができます。

[*8] 実際の長さ ℓ も sin の値が正に限られるので制限されます。

■円周率の計算 次に，上の結果を用いて，各場合について円周率を計算して見ましょう。

(1) $k = 0$ の場合

$$\text{円周率} = \frac{2\pi r}{2r} = \pi$$

ユークリッド空間の場合と同じです。上の結論と合わせると，この空間は3次元ユークリッド空間と言えます。

(2) $k = 1$ の場合

$$\text{円周率} = \frac{2\pi r}{2a\sin^{-1}\frac{r}{a}} \approx \pi(1 - \frac{1}{6}\frac{r^2}{a^2}) < \pi$$

(3) $k = -1$ の場合

$$\text{円周率} = \frac{2\pi r}{2a\sinh^{-1}\frac{r}{a}} \approx \pi(1 + \frac{1}{6}\frac{r^2}{a^2}) > \pi$$

$k = \pm$ の与える空間をもう少しイメージし安くするために，それらの空間を4次元のユークリッド空間の中に描かれた曲面として見て見ましょう。手順は，次の通りです。

先ず，4次元ユークリッド空間において，任意の隣接する2点間の距離 ds に対して一般に，

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2 \tag{5.14}$$

が成り立つことに着目します。次に，これに

$$\begin{cases} x^1 = r\sin\theta\cos\phi \\ x^2 = r\sin\theta\sin\phi \\ x^3 = r\cos\theta \end{cases} \tag{5.15}$$

と置いて代入して計算し，次の関係を求めます。

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + (dx^4)^2 \tag{5.16}$$

最後に，この結果と (5.11) とを比較して，

$$(dx^4)^2 = \frac{kr^2}{a^2 - kr^2}dr^2 \tag{5.17}$$

を導き，x^4 を選びます。以下，$k = \pm 1$ の各場合について順に見て行きましょう。

■$k=1$ **の場合**　先ず，$k=1$ の場合を考えます。この場合，(5.17) より次の関係が得られます。

$$dx^4 = \frac{\pm r}{\sqrt{a^2 - r^2}}dr \tag{5.18}$$

これは積分すると

$$x^4 = \pm\sqrt{a^2 - r^2}$$

となります。更に，この結果を 2 乗すると $r^2 + (x^4)^2 = a^2$ が得られます。そして，この結果を，r の代わりに，(5.15) を用いて x^1, x^2, x^3 で表すと

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = a^2 \tag{5.19}$$

という結論に達することが分かります。これが，4 次元ユークリッド空間の中の半径 a の「球」を表していることは明らかでしょう。こうして，$k=1$ の閉じた空間は，4 次元ユークリッド空間の中の半径 a の球面のようなものとイメージできます。

■$k=-1$ **の場合**　次に，$k=-1$ の場合を考えましょう。この場合，(5.17) より

$$dx^4 = \pm i\frac{rdr}{\sqrt{a^2 + r^2}} \tag{5.20}$$

が得られます。$k=1$ の場合と同様に，これを積分して，2 乗すると

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = -a^2 \tag{5.21}$$

が得られます。これを満たす実数 x^4 は存在しないため $x^4 = ix^0$ と置くと

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = a^2 \tag{5.22}$$

と書かれます。これは，ミンコフスキー空間における半径 a の球面，そして，$a=0$ とすれば光円錐そのものとしてイメージできます。或は，座標 x^0 も他と同等に考えれば 4 次元ユークリッド空間における「2 葉双曲面」としてイメージできることが分かります。

5.3　宇宙モデル

宇宙モデルに関係した事柄を歴史順に極く簡単に記すと次のようになります[*9]。

---

*9 このテキストでは，FLRW によるホット ビッグバン モデルまでの関連する記述に限ることにします。

- 1916 年〜27 年頃，アインシュタインの一般相対論に基づく色々なモデルが提案された。
  (1) アインシュタイン：宇宙項を導入して静的宇宙モデルを提案。
  (2) フリードマン (1922 年)，ルメール (1927 年) は，アインシュタイン方程式を解いて，膨張・収縮する宇宙モデルを提案。
  (3) ドジッター：宇宙項の役割を調べ，指数関数的に膨張する宇宙の可能性を示した。これは後のインフレーションの原因として宇宙定数を考える見方を生んだ。
- 1929 年，ハッブルは，膨張する宇宙を示唆する，いわゆるハッブルの法則を発見した。
- 1946 年，ガモフは，元素合成の立場からホットビッグバン宇宙論を提案した。
- 1965 年，ペンジアスとウイルソン (Penzias & Wilson) によってビッグバンの名残りとしての宇宙背景放射 (CMB)，つまり等方的な 3K の輻射が発見された[*10]。
- 1970 年代，ヴェラ・ルービンは，銀河を構成する星の回転速度が内側と外側でほぼ同じあることを指摘した。その後の 80 年代，21cm 輝線のレッドシフトの測定によりこの事実は確認された。これにより暗黒物質（ダークマター）の存在が予測されるようになった。
- 1981 年，佐藤勝彦，そして独立にアラン・グース (Alan H. Guth) は，宇宙はその初期に指数関数的に急膨張したとするインフレーション モデルを提唱した。
- 1992 年，CMB 観測衛星 COBE のデータ解析から，スマート等 (Smoot et al) は，インフレーションモデルの予測に合う CMB の非等方性を示した。CMB の非等方性についての観測は，その後，ハッブル定数や宇宙のエネルギー密度，宇宙定数等の様々なパラメータの値を特定するために WMAP(Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) 衛星 (2003 年)，Planck 衛星 (2005 年〜) による観測へと引き継がれている。
- 1998 年，パールムッターのチームと，シュミット，リースのチームとは，1990 年代からの長年のタイプ 1a 型の超新星爆発の観測データから宇宙が加速膨張を続けていることを発見して，1998 年にその結果をほぼ同時に発表した。

[*10] この現在値は，2009 年のフィクセン (Fixsen) による $T_0 = 2.7255 \pm 0.0006\mathrm{K}$ です。

上の概略からも分かるように，1929年のハッブルによる宇宙膨張の発見や，ガモフによるビッグバン宇宙論の提唱よりずっと以前にフリードマン (Friedmann) は，アインシュタイン方程式を用いて，膨張宇宙の可能性について議論していましたが，当時，アインシュタインの一般相対論自身が，それほどのコンセンサスを得ていたわけではなかったので，天文家の知るところではなかった様です。が，しかし，その後の一般相対論の成功やペンジアスとウイルソンによるビッグバンの名残りのいわゆる 3K の宇宙背景放射の発見を経て，現在では，ルメール (Lemaître)，ロバートソン (Robertson)，ウォーカ (Walker) 等による貢献と合わせてホットビッグバン宇宙論の標準理論と云える地位を獲得しています。もちろん，CMB の非等方性の発見以来，FLRW 計量テンソルの修正や，アインシュタインの重力理論自体の修正も視野に入れた観測や研究が続けられていますが，これらの進んだ話題については，入門書である当テキストの領分を越えるためこれについては他書に譲り[*11]，本テキストでは標準理論にまつわる2，3の話題に限って記述することにします。

5.3.1　宇宙項を持つアインシュタイン方程式

この節では，宇宙が色々な完全流体で一様に満たされているという仮定の下に，宇宙項 Λg_{ij} を伴ったアインシュタイン方程式

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R - \Lambda g_{ij} = \kappa T_{ij} \tag{5.23}$$

を用いて得られる3種類の特徴的な宇宙モデルについて紹介することにしましょう[*12]

良く知られているように，宇宙項は，アインシュタインによって静的宇宙モデルを作るために導入されましたが，その後，ハッブルによる宇宙膨張の観測結果を受けて取り下げられたもので，上述したように，今では定説に成っている宇宙の創世期でのインフレーションの原因となる真空のエネルギーを与える項とも考えられています。

先に進む前に，宇宙を作っているエネルギー・物質分布 (エネルギー・運動量テンソル) について一言しておきます。

標準理論でも採用されて来た完全流体の仮定は，今でも空間が極めて一様かつ等方的という経験事実を基礎に置き，エネルギーを含めた物質分布が時空を決めるという

---

*11 例えば，参考文献 [17] や，http://arxiv.org/pdf/1303.5076v3.pdf の Planck 衛星による観測結果のレポート (2014) など。

*12 もちろん，$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ はアインシュタインの重力定数で，Λ は宇宙定数です。

立場からは，それほど不自然ではないでしょう。

その完全流体のエネルギー・運動量テンソルは，§3.7.2 で見て来たように，流体が静止して見える系では

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

と書かれ，また一般には (3.121) 式，つまり

$$T^{ij} = (\rho + p)u^i u^j - pg^{ij}$$

と書かれることが分かります。

また，節 §3.5.8 で説明したビアンキ恒等式

$$\left(R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R\right)_{;j} = 0 \tag{5.24}$$

とメトリックテンソルの共変微分が 0 となることを考慮すると，一般のアインシュタイン方程式 (5.23) からも，次のエネルギー・運動量保存則

$$T^{ij}{}_{;j} = 0 \tag{5.25}$$

が要請されることが結論されます。これらのことを前提にして以下の議論に進むことにしましょう。

5.3.2 宇宙の 4 次元線素

節 §5.2 で述べた一様で等方性を持った空間が，各瞬間に広がっている様な，座標系と時間座標 t とを選ぶと，一般に，次の 4 次元線素を持った時空が仮定できます*13。

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left[\tfrac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right] \tag{5.26}$$

この空間部分は，一様で等方性を持った 3 次元空間を表す線素 (5.27) を，$r \to ar$ として

$$d\ell^2 = a^2\left[\frac{1}{1-kr^2}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right] \tag{5.27}$$

*13 このような基準系は共動系 (comoving frame) と呼ばれています。

と書き，このa＝一定の空間と共形，つまり“相似”な空間を宇宙は各瞬間に持ち得るとして次の変換を行ったものと考えることができます*14。

$$a \to a(t)$$

この計量テンソル (5.26) は，ロバートソン・ウォーカ計量テンソルとして知られています。

5.3.3 フリードマン方程式

計量テンソル (5.26) を与える座標系を用い，宇宙流体はこの系に対して静止していると仮定してアインシュタイン方程式 (5.23) を書き下すと，次の方程式が導かれます*15。

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^4}(\rho_m + \rho_{rad} + \rho_{vac}) \tag{5.28}$$

また，$T^r{}_r = T^\theta{}_\theta = T^\phi{}_\phi = -p$ に注意すると (3.121) より

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = -\frac{8\pi G}{c^4}p \tag{5.29}$$

が得られます。ここで，ρ_m は物質分布の密度，ρ_{rad} は輻射の密度，そして ρ_{vac} は真空の密度*16です。また，a の上のドット ($\dot{}$) は，ct による微分を表していることに注意して下さい。

これらの式の内で (5.28) は，一般に**フリードマン方程式**と呼ばれています。一方，下の式は，フリードマン方程式と，エネルギー・運動量の保存式 (5.25) とから導かれる式

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -p\frac{d}{dt}a^3 \tag{5.30}$$

*14 この変換に依って，a は無次元量となり，k は長さの2乗分の一の次元を持った定数 $0, \pm 1$ になります。また，a を時間の関数と考えることに依って，一様性と等方性を保ったまま時間変動する宇宙の可能性を探ることができるようになります。

*15 以下の2式の Maxima による導出例が付録 §B.6.2.1 にあります。

*16 $\rho_{vac} = \frac{c^4\Lambda}{8\pi G}$ であり，エネルギー・運動量テンソルで書くと

$$T^\Lambda{}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho_{vac} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_{vac} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_{vac} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_{vac} \end{pmatrix}$$

となります。従って，宇宙項は，Λ が正であるとすると，負の圧力としての効果を与えることが分かります。

とを用いて導出することができます。

また，式 (5.30) は，これに宇宙流体に対する状態方程式

$$p = \alpha\rho \tag{5.31}$$

を用いると容易に積分できて，これにより宇宙流体のエネルギー密度 ρ の変化の様子を a の関数として見ることができます。

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+\alpha)} \tag{5.32}$$

ここで，ρ_0 は定数で，$a = 1$ のときの宇宙流体のエネルギー密度としています。一方，α は宇宙流体の密度と圧力に関係し，その種類に依存する定数です。これは，空っぽの宇宙（つまり真空）や，輻射のみで満ちた宇宙や，塵，つまり，相互作用が全くない独立した天体のみから構成された宇宙という特別な宇宙の場合には，それぞれ $\alpha = -1$，$\frac{1}{3}$，0 と仮定することができます。従って，これらの各場合には，これらの値を (5.32) に用いることによって，フリードマン方程式 (5.28) は初等的な方法で解くことができます。

5.3.4 方程式を解く

この節では，$\alpha = -1$，$\frac{1}{3}$，0 の典型的な宇宙流体について，フリードマン方程式 (5.28) を，その補助方程式 (5.32) と共に解くことによって得られる宇宙モデルについて見て行くことにしましょう。

5.3.4.1 ド・ジッター宇宙

現在までの色々な観測によって，宇宙初期には，驚異的な速さで宇宙が膨張した時期があると考えられています。そして，それを説明する理論としてインフレーションモデルが提案されて来ました。このモデルの与える宇宙は定性的には，ドジッターによって解かれた宇宙項のみのアインシュタイン方程式の与える宇宙の振る舞いと同じです。先ずはじめに，この解について見て行くことにしましょう。

フリードマン方程式 (5.28) は，今の場合は次のように書かれます。

$$\dot{a}^2 = \left(\frac{a}{a_{0v}}\right)^2 - k \tag{5.33}$$

ただし，a_{0v} は，次のように置いた定数です。

$$a_{0v} \equiv \sqrt{\frac{3}{\kappa|\rho_{0v}|}} \left(= \sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}}\right) \tag{5.34}$$

図 5.2 は，この式の右辺を $U(a)$ として各 k の値について図示したものです。明らかに，(5.33) が解を持つためには $0 \leq U(a)$ が要求されます。この事実とこの図を参考にして，k の各場合の (5.33) の解について考えて行きましょう。

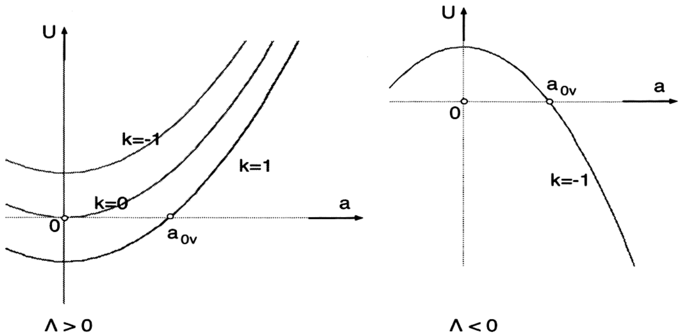


図 5.2 有効ポテンシャル $U = \left(\frac{a}{a_{0v}}\right)^2 - k$ の k，および Λ 依存性

■$k = 1$ のとき この場合，a は，$a_{0v} \leq a$ を満たす場合のみ許されます。そして，a を，$x^0 = 0$ での a_{0v} からの x^0 の増加関数とすると，(5.33) より次の積分が得られます。

$$\int_{a_{0v}}^{a} \frac{da}{\sqrt{a^2 - {a_{0v}}^2}} = \frac{1}{a_{0v}} \int_0^{x^0} dx^0, \tag{5.35}$$

この左辺の積分は，例えば $a = a_{0v} \cosh \xi$ と置くことによって直ちに実行できます。そして，最終的に結果は次の式にまとめられるでしょう。

$$a = a_{0v} \cosh \left(\frac{x^0}{a_{0v}} \right) \tag{5.36}$$

この式は，大きな x^0 に対しては，$a \approx \frac{a_{0v}}{2} e^{\frac{x^0}{a_{0v}}}$ として振舞います。この事実と節 §5.2.4 での $k = 1$ の場合の考察とを合わせると，この解は，$a_{0v} \ll x^0$ の時間帯では，半径が指数関数的に増大して行く 4 次元ユークリッド空間中の球面としてイメージできます。

■$k = 0$ の場合 この場合，$0 \leq a$ を満たすすべての a に対して許されますが，$x^0 = 0$ のとき，$a = 0$ とするとすべての時間に対して $a = 0$ となります。また，$x^0 = 0$ の

とき，$a = a_{0v}$ とすると，このときの解は

$$a = a_{0v} e^{\pm \frac{x^0}{a_{0v}}} \tag{5.37}$$

となります。特に，このプラス (+) の方の解は，節 §5.2.4 での考察と合わせると，3 次元ユークリッド空間としての宇宙がある一定の時刻から時間経過と共に指数関数的に膨張することを示しています。

■$k = -1$ **の場合**　この場合，Λ に正負の可能性を許すとすると，次に述べる 2 種類の可能性が考えられます。

$\Lambda > 0$ **の場合**　この場合，a が，$x^0 = 0$ で取る値 $a = 0$ から単調に増加する x^0 の関数とすると，(5.33) の積分は，次のように書かれます。

$$\int_0^a \frac{da}{\sqrt{a^2 + {a_{0v}}^2}} = \frac{1}{a_{0v}} \int_0^{x^0} dx^0 \tag{5.38}$$

この積分結果と初期条件 $(a(0) = 0)$ とから次の結果が導かれます。因に，左辺の積分は，$a = a_{0v} \sinh \xi$ と置けば，直ちに実行できます。

$$a = a_{0v} \sinh\left(\frac{x^0}{a_{0v}}\right) \tag{5.39}$$

この解は，$k = 1$ の場合と同じく，大きな x^0 に対しては，$a \approx \frac{a_{0v}}{2} e^{\frac{x^0}{a_{0v}}}$ として振舞います。そして，節 §5.2.4 での考察とを合わせると，$a_{0v} \ll x^0$ の時間帯では，この解は，指数関数的に増大して行く 4 次元ユークリッド空間中の 2 葉双曲面としてイメージすることができます。

$\Lambda < 0$ **の場合**　この場合，a は，$0 \leq a \leq a_{0v}$ を満たす場合のみ許されます。

このときの (5.33) の積分の結果は，次の形にまとめられます。

$$a = a_{0v} \sin\left(\frac{x^0}{a_{0v}} + \theta_0\right) \tag{5.40}$$

ただし，θ_0 は積分定数です。

上に見て来たように，真空のエネルギー密度が負という現実的でない $\Lambda < 0$ の特別な場合を除いて，すべての解は，時間と共に指数関数的に膨張する宇宙を示しています。図 5.3 はこの概略を描いたものです。

ところで，節 §5.2 で見て来たように，宇宙論には昔から知られる宇宙原理がありますが，これは，膨張宇宙の立場からすれば『なぜ宇宙はずっと遠方まで一様で等方的

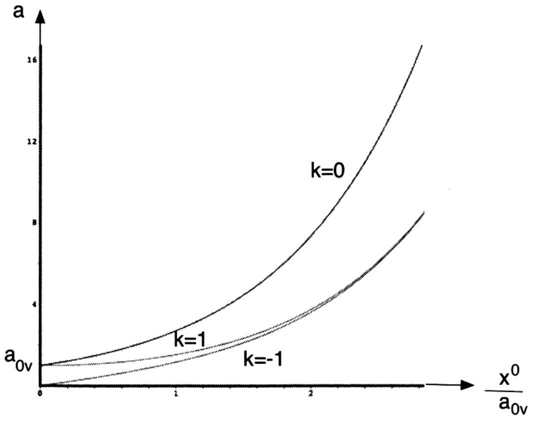


図 5.3 ド・ジッター宇宙：横軸は a_{0v} を単位として長さに換算した時間 $x^0(=ct)$ で，縦軸は宇宙半径 a です。図は $a_{0v}=1$ として描いたもの。

なのか』という疑問（平坦問題）になります。この問題は，ビッグバン直後に急激な膨張の時期があったと解釈することによって説明がつきますが，ここで見て来たように，アインシュタイン理論では宇宙項がこの役割を演じ得ると言えるでしょう。しかしながら，宇宙項の正体については未だ不明のままです。以下に見るように輻射や塵とは明らかに異なるものです。現在，宇宙項を与える真空のエネルギーは，ダークエネルギーとして素粒子論や宇宙論の立場から盛んに研究・探索が行われています[*17]。近い将来これに対する解答が得られると期待されます。

5.3.5 輻射で満ちた宇宙

高温高密度の状態からのバン（ビッグバン）の直後，数 100 秒の内に英語で nucleosynthesis と呼ばれる核融合の時期が始まるとされています。これによって陽子や中性子からヘリウムや重水素，リチウムなどの軽い元素が多量に作られたと考えられます。同時に，この反応は多量のエネルギーを発生するためこの時期の宇宙はほ

[*17] 宇宙項を与える宇宙定数 Λ とダークエネルギーとは別物であるとする観点もあります。Λ が時間的，空間的に変化しないのに対して，ダークエネルギーはダイナミックな存在であるとする立場です。

とんど輻射（光）で満たされていたと考えられます。この時期の宇宙のモデルについて考えて見ましょう。

輻射には，輻射圧という圧力があります。これを考慮すると状態方程式 (5.31) は，今の場合はほぼ

$$p = \frac{1}{3}\rho \tag{5.41}$$

とすることができます。これを (5.32) に用いると

$$\rho = \frac{\rho_{0r}}{a^4} \tag{5.42}$$

が得られます。ただしここで，ρ_0 を ρ_{0r} と置いたことに注意して下さい。

このとき，フリードマン方程式 (5.28) は，次のように書かれます。

$$\dot{a}^2 + k = \left(\frac{a_{0r}}{a}\right)^2 \tag{5.43}$$

ただし，a_{0r} は

$$a_{0r} = \sqrt{\frac{\kappa\rho_{0r}}{3}} \tag{5.44}$$

と置いた定数です。

方程式 (5.43) は，何れの k の値に対しても容易に積分できますが，以下に，その各場合について見て行きましょう。

■$k=0$ **の場合**　$x^0 = 0$ のとき，$a = 0$ として，(5.43) を積分すると

$$a = \sqrt{2a_{0r}}\left(x^0\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.45}$$

が得られます。ところで，ρ が ρ_{0r} と成る時刻 ${x^0}_0 (= ct_0)$ では，$a = 1$ としているため，この式から

$${x^0}_0 = \frac{1}{2a_{0r}} \tag{5.46}$$

が成り立つことがわかります。従って，これを用いると (5.45) は，次のように書き直されます。

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.47}$$

そしてこのとき，輻射のエネルギー密度 ρ は，時間経過と共に次式に従って減少して行くことになります。

$$\rho = \rho_{0r}\left(\frac{t_0}{t}\right)^2 \tag{5.48}$$

こうして，この宇宙の膨張率は

$$H \equiv \frac{c\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t} \tag{5.49}$$

に従って，時間に反比例して減少して行くと結論されます。つまり，この場合 $(k=0)$ の輻射は，宇宙の膨張を減速させる効果として働くことがわかります。

■$k=1$ **の場合**　この場合の a は，$0 \le a \le a_{0r}$ に制限されることに注意する必要があります。前の場合と同様に，$x^0 = 0$ のとき，$a=0$ として積分すると，

$$a^2 = x^0(2a_{0r} - x^0), \qquad \frac{\rho}{\rho_{0r}} = \left(\frac{1}{x^0(2a_{0r} - x^0)}\right)^2 \tag{5.50}$$

が得られます。そして，このときの膨張率は

$$H = \frac{c(a_{0r} - x^0)}{x^0(2a_{0r} - x^0)} \tag{5.51}$$

となります。これから $a = a_{0r}$ となる時刻 $x^0 = a_{0r}$ には，$\frac{\rho}{\rho_{0r}} = \frac{1}{{a_{0r}}^4}$，そして $H=0$ となることが結論されます。

■$k=-1$ **の場合**　前2つと同じ初期条件の下に，次の結果が得られます。

$$a^2 = x^0(x^0 + 2a_{0r}), \qquad \frac{\rho}{\rho_{0r}} = \left(\frac{1}{x^0(x^0 + 2a_{0r})}\right)^2 \tag{5.52}$$

そして，膨張率として

$$H = \frac{c(x^0 + a_{0r})}{x^0(x^0 + 2a_{0r})} \sim \frac{1}{t} \tag{5.53}$$

ここで，右辺の最後の項は，$x^0 \to \infty$ となった場合の振る舞いを表しています。

図 5.4 は，上記の各 k の場合について，a の時間変化の様子を図示したものです。

5.3.6 塵で満ちた宇宙

「塵も積もれば山となる」ですが，いくら積もっても圧力は 0 のままというのがここで考える塵です。現在の宇宙のように，沢山の星が散らばって，平均してみると均一に分布していて，その間の相互作用は殆ど無視できるため圧力はほぼ 0 で，個々の星の速さは光速と比較して無視できるほど遅いためそのエネルギーは静止エネルギーに殆ど等しいといった状況をイメージすればよいでしょう。

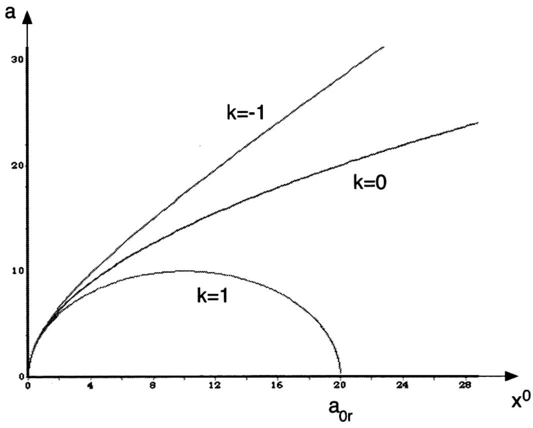


図 5.4　輻射で満ちた宇宙：横軸は宇宙時刻 x^0，縦軸はスケールファクター a，この図は $a_{0r}=20$ として描いています。

先ず初めに，(5.32) より，$\alpha=0$ とすると

$$\rho=\frac{\rho_{0d}}{a^3} \tag{5.54}$$

が得られることに注意しましょう。ここで，$\rho_0\equiv\rho_{0d}$ は，時刻 $x^0={x^0}_0$ で $a=1$ のときの塵のエネルギー密度です。フリードマン方程式 (5.28) は，このとき次のようになります。

$$\dot{a}^2+k=\frac{{a_{0d}}^2}{a} \tag{5.55}$$

ただし，${a_{0d}}^2=\frac{\kappa\rho_{0d}}{3}$ と置いています。

この式より，a を x^0 の増加関数と考え，$x^0=0$ のとき，$a=0$ であるとして積分すると

$$\int_0^a\frac{da}{\sqrt{\frac{{a_{0d}}^2}{a}-k}}=\int_0^{x^0}dx^0 \tag{5.56}$$

が得られます。更に，左辺の積分を実行するために，次の変数変換を行います。

$$\sqrt{\frac{{a_{0d}}^2}{a}-k}=\xi \tag{5.57}$$

このとき，元の式は，次のように書き直されるでしょう。

$$-2{a_{0d}}^2\int_{\infty}^{\xi}\frac{d\xi}{(\xi^2+k)^2}=\int_0^{x^0}dx^0 \tag{5.58}$$

この積分は，ξ の関数として時刻 x^0 の変化について教えてくれます。一方，$x^0={x^0}_0$ の時刻に対応する ξ の値を ξ_0 として，(5.57) を用いて a_{0d} を ξ_0 で

$${a_{0d}}^2={\xi_0}^2+k \tag{5.59}$$

と表すと，a は ξ により

$$a=\frac{{\xi_0}^2+k}{\xi^2+k} \tag{5.60}$$

と表されることが分かります。従って，このときの密度 ρ の変化は，(5.54) により

$$\rho=\rho_{0d}\left(\frac{\xi^2+k}{{\xi_0}^2+k}\right)^3 \tag{5.61}$$

と計算されます。そして，この密度変化によるこの宇宙の膨張率 $H\equiv\frac{c\dot{a}}{a}$ は，(5.58) に注意すると

$$H=\frac{\xi(\xi^2+k)}{{\xi_0}^2+k} \tag{5.62}$$

となることが分かります。次に，各 k の値に応じて見て行きましょう。

■$k=0$ の場合　この場合は，(5.58) の積分は容易に計算できて，次の結果に導かれます。

$$\xi^3=\frac{2{\xi_0}^2}{3x^0} \tag{5.63}$$

そしてこのとき，(5.60) により a は，x^0 の関数として次のように変化することが分かります。

$$a=\left(\frac{3\xi_0x^0}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{x^0}{{x^0}_0}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{5.64}$$

ここで，$\frac{3\xi_0}{2}=\frac{1}{{x^0}_0}$ を用いたことに注意して下さい。従って，このときの塵の密度 ρ と膨張率 H は，それぞれ次の式に従って変化することになります。

$$\rho=\rho_{0d}\left(\frac{{x^0}_0}{x^0}\right)^2=\rho_{0d}\left(\frac{t_0}{t}\right)^2 \tag{5.65}$$

$$H=\frac{2}{3t} \tag{5.66}$$

以上の結果から，塵は膨張を遅らせる効果はあるが，収縮させるほどの効果をもたないという結論に導かれます。

■$k=1$ **の場合**　このとき，a は，$a=0$ から $a={a_{0d}}^2$，或は ξ で言えば，$\xi:\infty\sim 0$ の範囲に限られます。このことに注意して積分すると，次の結果が得られるでしょう。

$$\tan\left(\frac{x^0}{{a_{0d}}^2}\right)=\frac{1-\xi\tan\left(\frac{\xi}{1+\xi^2}\right)}{\xi+\tan\left(\frac{\xi}{1+\xi^2}\right)} \tag{5.67}$$

この $\xi\approx 0(a\approx {a_{0d}}^2)$ の近傍での振る舞いは，

$$\tan\left(\frac{x^0}{{a_{0d}}^2}\right)\approx\frac{1}{2\xi}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{{a_{0d}}^2}{a}-1}} \tag{5.68}$$

となります。従って，$x^0=\frac{\pi {a_{0d}}^2}{2}$ の限られた時間で，a は限界値 ${a_{0d}}^2$ に達することが分かります。

■$k=-1$ **の場合**　このとき，ξ が ∞ から 1 まで変化するとき，a は 0 から ∞ まで変化します。そして，それに応じて時刻 x^0 は，0 から

$$x^0=\frac{{a_{0d}}^2\xi}{\xi^2-1}+\frac{{a_{0d}}^2}{2}\log\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right) \tag{5.69}$$

に従って ∞ まで変化します。

図 5.5 は，上の各場合についての概略を図示したものです。

5.4　標準モデルと観測量

この節では，宇宙項を伴うフリードマン方程式を基調とするホット ビッグ バン宇宙モデルと観測量との関わりについて考えます。

フリードマン方程式には，観測によってしか決められない未知の 3 つのパラメータ，つまり宇宙のエネルギー密度 ρ，宇宙のグローバルな構造に関係した定数 k，そして宇宙定数 Λ が含まれています。これらのパラメータが観測に依って特定されることによって標準モデルによる宇宙の記述が完成します。この節では，これらのパラメータと観測量との関わりについて見ることにしましょう[*18]。

[*18] 参考のため，Planck 衛星のデータの解析から得られている宇宙パラメータの 2014 年での現在値を付録の §A.2 に載せています。

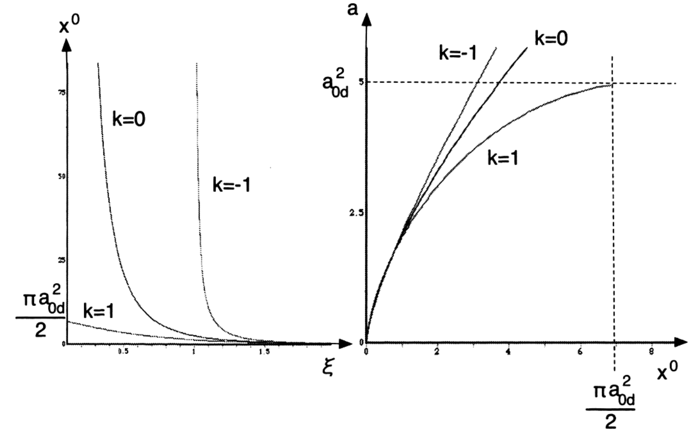


図 5.5 **塵で満たされた宇宙**：$\xi_0 = 2, {a_{0d}}^2 = 5$ として，左図は，パラメータ ξ の関数としての宇宙時間 x^0 を，右図は，x^0 の関数としての a を描いたものです。付録 §B.5.2 に Maxima によるプログラム例があります。

5.4.1 ハッブル パラメータ

ハッブルの法則を説明するために，よく用いられるのがバルーン モデルです。これによると，時刻 t にはすべての銀河は半径 $a(t)$ の大きなバルーンの上に乗っていて，宇宙の膨張と共にその半径は増加するため，銀河間の距離 $s(t)$ も増加します。そして，その増加する速さ，つまり銀河が互いに離れてゆく速さ v は，その間の距離に比例して速くなると結論されます。図 5.6 はこれを説明したものです。この図より v は，次のように表されることがわかります。

$$
\begin{aligned}
v &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a(t+\Delta t) - a(t)}{\Delta t} \psi \\
&= \frac{c\ da(t)}{dct} \psi = \frac{c\dot{a}(t)}{a(t)} s(t) \equiv H(t)s(t) \qquad (5.70)
\end{aligned}
$$

ここで定義した

$$
H(t) \equiv \frac{c\dot{a}(t)}{a(t)} \qquad (5.71)
$$

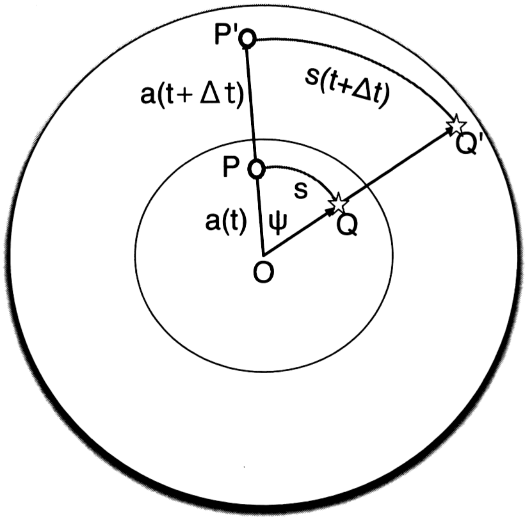


図 5.6 P,Q は，時刻 t での半径 $a(t)$ の球面上の 2 つの銀河。P',Q' は，時刻 $t+\Delta t$ まで膨張した半径 $a(t+\Delta t)$ の球面上にある対応する銀河。$s(t)$ と $s(t+\Delta t)$ は，各球面上の対応する銀河間の距離。ψ は OP と OQ の間の角。

がハッブル パラメータと呼ばれている量で，前節では，宇宙の膨張率として用いた量です。前節の特別な場合でも見たように，この量は，一般には時間の関数と考えられます。従って，観測から得られたハッブルの法則 (2.113) と (5.70) との比較からハッブル定数は，現在の宇宙時刻 t_0 でのこの値 $H(t_0) \equiv H_0$ と解釈できます。

5.4.2 臨界密度と宇宙のグローバル構造

次のような特別なエネルギー密度を考えましょう。

$$\rho_{crit} \equiv \frac{3c^2H^2}{8\pi G} \tag{5.72}$$

そして，エネルギー密度をこれに対する比として

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_{crit}} \tag{5.73}$$

と定義しましょう。このとき，フリードマン方程式 (5.28) から次式が導かれます。

$$\frac{c^2 k}{a(t)^2 H^2} = \Omega - 1 \tag{5.74}$$

ここで，$\rho \equiv \rho_m + \rho_{rad} + \rho_{vac}$ と置いていることに注意してください。

この式 (5.74) により，節 §5.2.4 で議論した k によって分類された宇宙のグローバルな構造は，今や Ω が 1 に等しいか，$\Omega > 1$ か，または $\Omega < 1$ であるかによって，つまり，宇宙のエネルギー密度 ρ が ρ_{crit} に等しい $(k = 0)$ か，大きい $(k = 1)$ か，小さい $(k = -1)$ かに従って分類されることが分かります。この意味で，ρ_{crit} は宇宙のエネルギー密度の臨界値と云うことができます。

5.4.3　減速パラメータ

$a(t)$ を宇宙半径と見立てると，$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}$ は，宇宙が加速して膨張して行く割合を表す量であることがわかります。歴史的には，次に定義された量が減速パラメータとして定義されてきました。

$$q \equiv -\frac{c^2}{H^2}\left(\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}\right) \tag{5.75}$$

これに，(5.29) と (5.28)，および (5.31) とを用いると次の式が導かれます。

$$q = \frac{\Omega}{2}(1 + 3\alpha) \tag{5.76}$$

これから，もし現在，真空のエネルギーが支配的であるとすると，$\alpha = -1$ で $q_0(\equiv q(t_0))$ は負となるため，宇宙は加速膨張をしていると結論されます。

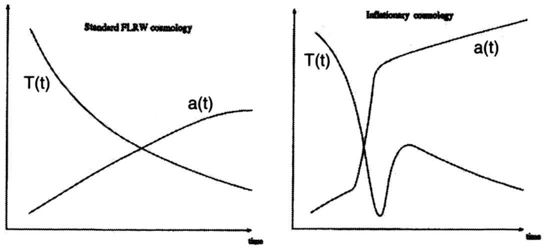


図 5.7　標準モデルとインフレーションモデルの温度変化 $T(t)$ と宇宙半径 $a(t)$ の変化の概略図：左が標準モデル

5.5 インフレーションモデル

これまでに見て来た様に，現在標準の名を得ている宇宙論は，ほぼ 1922 年のフリードマンによるアインシュタイン方程式に基づく宇宙モデルで，1929 年のハッブルによる膨張する宇宙の観測，1946 年のガモフのビッグバンモデルの提唱，そして 1965 年のペンジアスとウィルソンによる宇宙背景放射 (CMBR) の観測を経て，今の地位を得て来たものと言えます[*19]。

その一方で，ずっと以前より知られていた標準宇宙論の諸問題，「著しくいびつな形をしていても良いのに，宇宙はなぜこれほどまでに平坦に近いのか」という平坦問題，「はるか遠く光でも宇宙の年齢ほどかかるほど離れている天球上の端と端にある領域が，どのように相互作用して一様・等方的になったのか」という地平線問題，「宇宙が相転移を起こして現在の姿となったとすると，全空間で一斉に相転移が起こったとは考えられない。従って，その欠陥としてのモノポールや宇宙ひもが多数観測されても良いはずなのに，全く観測されないのはなぜか」というモノポール問題，がますます鮮明になって来ました。

この問題に対する解答は，1980 年初頭，宇宙誕生後まもなく宇宙が急激に膨張 (インフレーション) したとするインフレーション理論により与えられました。このモデルに依ると，インフレーション以前の小さな宇宙では端から端までくまなく相互作用が行われ，相互作用し終わった領域が引き離され，密度のムラが引き伸ばされたと考えられるため平坦問題と地平線問題が，またインフレーション以前には現在よりもはるかに密度にムラがあり，たくさんのモノポールが相転移によって出来たとしても，それらが急激に引き伸ばされることで個数密度が地球からは観測できないほど薄まった考えられるためモノポール問題が解決できます。しかし，このインフレーションがどのようにして起こるのか，またこれに関与する「場」は何かという問題が新たに提起され，この方向に向けた研究が今なお続けられています。

因に，モデルの提唱の当初から考えられて来たのがスカラー場の相転移に基づくインフレーションの説明です。しかし，このスカラー場は何かという問題と共に，近年増々精度の上がった実験データを正しく説明するために，超弦理論や多次元宇宙論など様々な角度からの研究が行われています。

[*19] CMBR の観測は，その後も 1990 年から COBE，2001 年からは WMAP，更には Planck といった人工衛星を使った観測によりさらに精度よく続けられ，現在ではその分布の非等方性も明らかになって来て，このモデルの修正やその土台とするアインシュタイン理論自体の修正も視野に入れた研究や観測が行われています。

図 5.7 は，ホットビッグバン標準モデルとインフレーションモデルの相違を表す概略図です。t は時間，$T(t)$ は宇宙の温度，$a(t)$ はスケールファクターです。

付録 A

補足と基本データ

A.1 ブースト変換式の導出

x 方向ブースト変換式 (2.68) を，本文とは異なるもっと直接的な仕方で導出する方法について考えてみましょう。

一定の相対速度 (大きさ v) で一直線上（x, x' 軸上）を運動している 2 人の慣性観測者 A,B がいます。彼らは，すべての空間軸が互いに平行になるように自らの座標系を設定していて，出会った瞬間（座標系の原点 O と O' とが一致した瞬間）を起点として各々の時刻 t, t' を測り始めたとします。

今，A,B が，ある出来事（イベント）P を，それぞれ時刻 t, t' に，位置 (x, y, z)，(x', y', z') で観測したとします。このときの A の観測値 t, x, y, z と B のそれ t', x', y', z' との間の関係について考えましょう。

先ず，4 次元距離（世界間隔）の不変性から，共通のイベント（原点 O,O' が一致した瞬間のイベントで，これをイベント O とします）と P との間の A,B それぞれから見た 4 次元距離が等しいことから

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 \tag{A.1}$$

が成り立つことを観察します。次に，A,B の間の相違は，その間の相対速度のみであることを考慮すると，A,B 両者の時刻と座標の間の関係は 1 次の関係でなければならないことに注目します。従って，a_{ij} をイベントに依らない定数としてこの関係を次のように書きます。

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}_A \tag{A.2}$$

$$y'_B = y_A \tag{A.3}$$

$$z'_B = z_A \tag{A.4}$$

更に先に進むために，A から見て B は x 軸の正方向に，逆に B から A を見ると A は x' 軸の負の向きに速さ v で運動しているとしておきましょう。

具体的な計算に進みましょう。先ず，(A.2) を (A.1) へ代入して次の式を導きます。

$$a_{00}^2 - a_{10}^2 = 1 \tag{A.5}$$
$$a_{01}^2 - a_{11}^2 = -1 \tag{A.6}$$
$$a_{00}a_{01} - a_{10}a_{11} = 0 \tag{A.7}$$

これらの関係式から a_{ij} を v で表すために，a_{ij} はイベントに依らない定数であることに着目して，P として具体的に次の 2 つのイベントを取り上げて考えましょう。

(α) 時刻 t_α, t'_α に B の原点 O' で起こったイベント：$A:(ct_\alpha, vt_\alpha)$，$B:(ct'_\alpha, 0)$
(β) 時刻 t_β, t'_β に A の原点 O で起こったイベント：$A:(ct_\beta, 0)$，$B:(ct'_\beta, -vt'_\beta)$

これらを (A.2) へ用いると，イベント (α) より，

$$\frac{a_{10}}{a_{11}} = -\frac{v}{c} \tag{A.8}$$

また，イベント (β) より，

$$ct'_\beta = a_{00}ct_\beta \tag{A.9}$$
$$-vt'_\beta = a_{10}ct_\beta \tag{A.10}$$

従って，

$$\frac{a_{10}}{a_{00}} = -\frac{v}{c}, \quad \text{そして，} a_{00} > 0,\ a_{10} < 0 \tag{A.11}$$

という結果が得られます。

故に, (A.8) と (A.11) の比較により, $a_{00} = a_{11}$, そしてこの結果を (A.7) に用いて $a_{01} = a_{10}$ が直ちに得られます。従って，これらの結果を (A.5) と (A.8) に用いることによって，最終的に次の結果に到達できるでしょう。

$$a_{00} = a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad a_{01} = a_{10} = -\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{A.12}$$

A.2　基本データ

ここに挙げている数値は，当テキストで行なう数値計算に必要な程度の精度までのものです。より正確な値を知りたい場合は，理科年表や然るべきサイトを参考にして下さい。

万有引力定数 $G = 6.67384 \times 10^{-11}$ [$\mathrm{Nm^2/kg^2}$],
太陽質量 1.9884×10^{30} [kg],　　太陽のシュワルツシルド半径 2.953 [km]
地球質量 5.972×10^{24} [kg],　　地球半径 6378 [km]
光速 2.99792458×10^{8} [m/s],　　1年 3.1557600×10^{7} [s]
1光年 $9.460652904 \times 10^{15}$ [m]

A.2.1　惑星データ



	水星	金星	地球	火星	木星	土星	天王星	海王星
赤道半径	0.3825	0.9488	1(6378.1km)	0.53226	11.209	9.449	4.007	3.883
質量	0.055	0.815	1(5.9742E+24kg)	0.107	318	95	14	17
平均軌道半径	0.38709893	0.72333199	1	1.52366231	5.20336301	9.53707032	19.19126393	30.06896348
半長軸 km	57909183.15	108208939.5	149597890	227936866.6	778412127.2	1426725597	2870972590	4498253491
半短軸 km	56671644.45	108206457.3	149577002.3	226940015.6	777500130.9	1424632276	2867777152	4498087689
半通径 km	55460552.37	108203975.2	149556117.6	225947722.4	776589203.1	1422542027	2864585271	4497921893
離心率	0.20563069	0.00677323	0.01671022	0.09341233	0.04839266	0.0541506	0.04716771	0.00858587
平均速度km/s	47.8725	35.0214	29.7859	24.1309	13.0697	9.6724	6.8352	5.4778
周期〔年〕	0.2408467	0.61419726	1.0000174	1.8808476	11.862615	29.447498	84.016846	164.79132
脱出速度km/s	4.25	10.36	11.18	5.02	59.54	35.49	21.29	23.71
近日点移動(″/T)	0.103753745	0.053179562	0.038475457	0.02546713	0.007409632	0.00404504	0.002008752	0.001279311
回転数／年	4.152018691	1.628141422	0.9999826	0.531675187	0.084298445	0.033958742	0.011902375	0.006068281
近日点移動(″/100年)	43.07874879	8.658384755	3.847478774	1.354024106	0.062462043	0.013736449	0.002390891	0.000776322

図 A.1　太陽系の惑星データ：近日点移動のデータは (4.86) による計算値です。その他は wikipedia/USA の値を用いています。

A.2.2　宇宙パラメータ

以下のデータは，Planck 衛星による観測結果のレポート (http://arxiv.org/pdf/1303.5076v3.pdf) から借用したものです。これらの値は，更により詳細な観測と分析に依って変化して行くでしょう。ここで上げたデータは，2014 年 3 月に発表された Planck のみのベストフィットの値です。その他詳しいことは上記レポートを参照して下さい。

t_0	H_0	Ω_m	Ω_Λ	$\omega_b \equiv \Omega_b h^2$	$\omega_c \equiv \Omega_c h^2$
13.819	67.11	0.3175	0.6825	0.022068	0.12029

ここで，t_0 は宇宙年齢（×10 億年)，H_0 はハッブル定数 ($kms^{-1}Mpc^{-1}$)，Ω_m は臨界密度に対する物質密度の比，Ω_Λ は臨界密度に対するダークエネルギー密度の比，ω_b はバリオン密度，ω_c はコールドダークマターの密度，そして h は，H_0 を次のように置いた量です。

$$H_0 = 100h \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$$

付録 B

Maxima の使い方

B.1 概観

Maxima は，１９６８年にマサチューセッツ工科大学（MIT）で開発が始まった Macsyma を母体とする GPL ライセンス（事実上フリー）の優れた数式処理ソフトです。

Mac や Windows，或いはすべての UNIX 系 OS 向けに，バイナリ（実行ファイル）の形で配布されています。Maxima には，wxMaxima や Texmacs などのユーザーインターフェース（UI）がありますが，初心者には wxMaxima がお勧めです。このテキストでもこれを用いています。Windows 版ではこれは，Maxima の配布パッケージの中に含まれています。その他，インストール方法や使用法に関しての優秀な解説がネット上で多く公開されています。必要に応じて参照されるとよいでしょう。

B.2 基本操作

詳しいことは，上記サイトなどを参考にしてもらうことにして，ここでは必要最低限の極く基本的な操作法のみを列挙することにします。ただし，ここでは wxMaxima を用いますが，UI 依存性は出来るだけ避けて， コマンドラインでの操作を中心に説明することにします。

1. **起動**：基本的にアイコンのダブルクリック。
2. **終了**：quit() ＋（シフト＋エンター）[*1]。命令を連続して入力する場合は，各命令の最後にセミコロン（；）を付ける。最後のコマンドは（シフト＋エンター）で終わる。ただし， 結果の出力を抑えたい場合にはセミコロンの代わりにドルマーク（＄）を用いる。
3. **保存**：まずカレントフォルダを system(“cd”);（Mac や unix 系 OS の場合は system(“pwd”);）と打って調べる。次の操作でファイルはそのフォルダに保存される。

[*1]（シフト＋エンター）は，Shift キーを押したまま Enter キー（Mac や Unix では return キー）を押すことを意味します。コマンドの入力後に，それを実行させる場合は常にこれを行う必要があります。

save("today.out",all); これによって today.out というファイルに今まで行った操作がすべて保存される。

4. **リストア：**基本的に呼び込むファイルがあるフォルダで操作する[*2]。
loadfile("today.out"); でファイルが読み込まれ，playback(); で today.out でのすべての操作が再現される。
5. **ヘルプ：**コマンドについて知りたいときは，「？コマンド名」で検索する。

B.3　基本演算

よく使う基本的な演算コマンドについてまとめて置きます。

1. **簡単化：**直前で行った演算の結果は ratsimp(%); で整理されることが多い。
2. **依存関係：** f が x に依存することを宣言するためには depends(f,x); とする。depends([f,g,h],x); は 3 つの関数 f,g,h が x に依存することを，depends(f,[x,y,z]); は，f が 3 変数 x,y,z に依存することを，また depends([f,g,h],[x,y,z]); は，f,g,h が x,y,z に依存することを宣言する。
3. **微分 1：**まず depends(f,x); として，依存関係を宣言する。次に diff(f,x); と入力すると $\frac{df}{dx}$ の結果が得られる。2 変数の関数の場合は，depends(f,[x,y]); として，続けて diff(f,x); と入力すると偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}$ が計算される。同様に，$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を計算させたいときは，diff(f,y,2); と入力し，$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を計算させたいときには，diff(f,x,1,y,1); と入力する。このとき，引数 1，1 は省略できない。f が行列の場合にも同様に扱える。
4. **微分 2：**関数 f(x0,x1,x2,x3) の 4 次元勾配 $\frac{\partial f}{\partial x^\mu}$ は，load(ctensor); で ctensor パッケージを呼び込み，ct_coords:[x0,x1,x2,x3]; で用いる座標系を設定し，depends(f,[x0,x1,x2,x3]); で依存関係を決めて，cograd(f,gradf); とすれば得られる。ここで，最後の cograd の引数 gradf は適当につけた f の勾配の名前。これを用いて，たとえば gradf[1]; により，$\frac{\partial f}{\partial x0}$ が得られる。
5. **代入：**簡単な場合には，コロン (:) を用いる。たとえば，ax^2+b を f に代入するには，f:ax^2+b; とする。
複雑な場合には，まず load("lrats"); としてパッケージを呼び込む。これで強力な fullratsubst コマンドが使えるようになる。この他にも代入コマンドはあるがこれが最も強力（？）。詳しくは，?fullratsubst で検索を。
fullratsubst の使用例
(例) $f(r)=\frac{1}{r}$ のとき，$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ を計算せよ。ただし，$r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ とする。
(解)

[*2] ファイル保存の場合もですが，カレントフォルダ以外のフォルダから呼び込んだり，そこに保存したりすることももちろんできます。その方法についてはネットなどを参照して下さい。

まず，depends(r,[x1,x2]); として，依存関係を宣言。具体的な依存関係は後にまわす。
f(r):=1/r;
def:diff(f(r),x1,1,x2,1); 求める結果を def に代入。
load("lrats");
この段階の def の中には，r の x1 や x2 による微分を表す r_{x1}, r_{x2}, r_{x1x2} なる記号が含まれている。次の操作は，def の中の r_{x1}, r_{x2}, r_{x1x2} にそれぞれ
$\frac{\partial\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{\partial x_1}, \frac{\partial\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{\partial x_2}, \frac{\partial^2\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{\partial x_1 \partial x_2}$ を具体的に計算したものを代入し，最後に，結果をできるだけ r で表現するために，$\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ に r を代入している。
fullratsubst([diff(r,x1)=diff(sqrt(x1^2+x2^2),x1),
diff(r,x2)=diff(sqrt(x1^2+x2^2),x2),
diff(r,x1,1,x2,1)=diff(sqrt(x1^2+x2^2),x1,1,x2,1),
sqrt(x1^2+x2^2)=r],def);
fullratsubst(x1^2=r^2-x2^2,%);
最後の fullratsubst は，この前までの計算結果を見て更に式を簡単にするために入れたもの。

6. **関数の定義：** コロンイコール (:=) を用いる。たとえば，$f(x) = ax^2 + b$ を定義するには，f(x):=ax^2+b; とする。

7. **テンソルの生成 1：** 2 階までのテンソルなら行列で定義して扱う。例えばミンコフスキー計量 $diag(1, -1, -1, -1)$ は，minkmet:matrix([1,0,0,0],[0,-1,0,0],[[0,0,-1,0],[0,0,0,-1]); ここで，minkmet は適当に選んだ名前。

8. **テンソルの生成 2：** 3 階以上は関数的に定義する。例えば，3 次元のレビ・チビタテンソル ϵ_{ABC} は，まず，単位行列を利用してクロネッカーデルタを定義する。dlta:ident(3); 次に，これを用いて，
epsilon[A,B,C]:=determinant(matrix([dlta[1,A],
dlta[1,B],dlta[1,C]],[dlta[2,A],dlta[2,B],dlta[2,C]],
[dlta[3,A],dlta[3,B],dlta[3,C]])); とすればよい。

9. **テンソルの和と積：** 行列の積が使える場合は，(.) 演算子を利用する。そうでない場合は次の例のように和のコマンドを用いる。
$\Delta^p{}_{mn} A_p \rightarrow$ sum(Delta[p,m,n]* A[p],p,1,4]);
p について 1 から 4 までの和をとっている。

B.4 使用例

Maxima の使用例として，本文中に現れた複雑な計算を要する 2，3 の式の導出に用いて見ましょう。

B.4.1 一般のブースト変換式 (2.58) の導出

例えば，以下に示すように入力すれば良いでしょう[*3]。

入力リスト中の Rz(phi) は，z 軸まわりの ϕ 回転を表す 3×3 行列，Rzm(phi) はその逆，Ry(theta) は，y 軸まわりの θ 回転を表す 3×3 行列，また，Ryz はそれらの合成回転，Ryzm はその逆回転を表す 3×3 行列を表しています。また LR(phi,theta) と LRm(phi,theta) とは，それぞれ Ryz と Ryzm を 4×4 行列として書いた行列とその逆行列で，0 成分のみの 3×1 行列 zero3M と (0,0) 成分のみが 1 で他はすべて 0 の 1×4 行列 uni4M とを，列を付け加えるコマンド addcol と行を加える addrow とを用いて作っています。一方，Bx(psi) は，パラメータ ψ で表した x 方向ブースト変換を表す 4×4 行列で，最後の LB(psi,phi,theta) が求める $\vec{e} = (\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta)$ 方向へのブースト変換を与える行列です。

```
--> Rz(phi):=matrix([cos(phi),sin(phi),0],[-sin(phi),cos(phi),0],[0,0,1])$
--> Rzm(phi):=trigrat(Rz(phi)^^-1)$
--> Ry(theta):=matrix([sin(theta),0,cos(theta)],[0,1,0],
              [-cos(theta),0,sin(theta)])$
--> Rym(theta):=trigrat(Ry(theta)^^-1)$
--> Ryz:Ry(theta).Rz(phi)$
--> Ryzm:Rzm(phi).Rym(theta)$
--> zero3M:matrix([0],[0],[0])$ uni4M:matrix([1,0,0,0]$
--> LR(phi,theta):=addrow(uni4M,addcol(zero3M,Ryz))$
--> LRm(phi,theta):=trigexpand(trigrat(LR(phi,theta)^^-1))$
--> Bx(psi):=matrix([cosh(psi),-sinh(psi),0,0],
               [-sinh(psi),cosh(psi),0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1])$
--> LB(psi,phi,theta):=LRm(phi,theta).Bx(psi).LR(phi,theta);
```

変換公式 (2.69) を求めるためには，更に，続けて次のように入力します。

```
--> Kcord:matrix([c*t],[x],[y],[z])$
--> Kpcord:LB(psi,phi,theta).Kcord$
-->prKp(i):=subst([cosh(psi)=gamma,sinh(psi)=gamma*beta],Kpcord[i,1]) $
--> load("lrats") $
--> Kp(i):=fullratsubst([cos(theta)=v_z/(c*beta),sin(theta)*cos(phi)
      =v_x/(c*beta),sin(theta)*sin(phi)=v_y/(c*beta)],prKp(i))$
```

[*3] CD-ROM 中のファイル名は，*General_boost.wxm* です。

この後は，Kp(1); Kp(2); Kp(3); Kp(4); と入力して情報を取り出せば良いでしょう。ただし，これらの結果にはなお ϕ が残されているため，$v_x = c\beta\sin\theta\cos\phi$, $v_y = c\beta\sin\theta\sin\phi$, $v_z = c\beta\cos\theta$ を考慮して書き換える必要があります。

B.4.2 (2.130) と (2.132) の関係

本文中，x 方向ブーストと y 方向ブーストを連続して行う変換行列 (2.130) が，K 系から K_p 系への変換を表す行列 (2.132) と，z 軸周りの Θ 回転を表す行列との積によって表されることを示すためには，例えば次のように入力するとよいでしょう[*4]。

```
/* x,y 方向ブーストと z 軸まわりの回転を表す行列の定義 */
-->Bx(psi):= matrix( [cosh(psi),-sinh(psi),0,0], [-sinh(psi),cosh(psi),0,0],
                [0,0,1,0], [0,0,0,1]);
-->By(psi):= matrix([cosh(psi),0,-sinh(psi),0], [0,1,0,0], [-sinh(psi),0,cosh(psi),0],
               [0,0,0,1]);
-->Rz(phi_z):= matrix([1,0,0,0],[0,cos(phi_z),sin(phi_z),0],
             [0,-sin(phi_z),cos(phi_z),0], [0,0,0,1]);
/* 最強？の代入ツールを読み込む */
-->load("lrats")$

/* x ブーストの後に連続して y ブーストを行う */
-->ByBx:By(psi_2).Bx(psi_1);
-->ByBxr:fullratsubst([cosh(psi_1)=gamma_1,sinh(psi_1)=gamma_1*beta_1,
        cosh(psi_2)=gamma_2,sinh(psi_2)=gamma_2*beta_2],ByBx);
```

更に続けて，以下のように入力します。

[*4] CD-ROM 中のファイル名は，*Thomas_prec.wxm* です。

```
/*  任意方向ブーストの定義 */
-->Bany(psi,phi,theta):=matrix([cosh(psi),-sin(theta)*cos(phi)*sinh(psi),
        -sin(theta)*sin(phi)*sinh(psi),-cos(theta)*sinh(psi)],
       [-sin(theta)*cos(phi)*sinh(psi),1+sin(theta)^2*cos(phi)^2*(cosh(psi)-1),
        sin(theta)^2*sin(phi)*cos(phi)*(cosh(psi)-1),
        sin(theta)*cos(theta)*cos(phi)*(cosh(psi)-1)],
      [-sin(theta)*sin(phi)*sinh(psi),
       sin(theta)^2*sin(phi)*cos(phi)*(cosh(psi)-1),
       1+sin(theta)^2*sin(phi)^2*(cosh(psi)-1),
       sin(theta)*cos(theta)*sin(phi)*(cosh(psi)-1)],
     [-cos(theta)*sinh(psi),sin(theta)*cos(theta)*cos(phi)*(cosh(psi)-1),
      sin(theta)*cos(theta)*sin(phi)*(cosh(psi)-1),
     1+cos(theta)^2*(cosh(psi)-1)]);
/*   K -> Kp へ向けて */
--> Bxy_D:Bany(psi,phi,%pi/2);
/* 情報を入力 */
-->beta:sqrt(beta_1^2*gamma_1^2+beta_2^2)/gamma_1;
-->Bxyr:fullratsubst([cosh(psi)=gamma_1*gamma_2,sinh(psi)=gamma_1*gamma_2*beta,
        cos(phi)=beta_1/beta,sin(phi)=beta_2/(beta*gamma_1)],Bxy_D);
/* z 軸周りの回転を施す */
-->RzBxy:Rz(phi_z).Bxyr;
/* データを用意し代入 */
-->sphi:-gamma_1*gamma_2*beta_1*beta_2/(gamma_1*gamma_2+1);
-->cphi:gamma_1*gamma_2*(beta_1^2*gamma_1+beta_2^2*gamma_2)/(gamma_1^2*gamma_2^2-1);
-->RzBxyr:fullratsubst([cos(phi_z)=cphi,sin(phi_z)=sphi],RzBxy);
-->RzBxyrr:fullratsubst([gamma_1^2*gamma_2^2-1
           =(beta_1^2*gamma_1^2+beta_2^2)*gamma_2^2],RzBxyr);
```

B.5 プロットの例

以下のプログラム例では，gnuplot などの補助アプリのインストール状況に応じて，plot2d コマンドのオプション $[plot_format, openmath]$ を，$[plot_format, gnuplot]$ としてください。

B.5.1 等加速度直線運動から

先ず，節 §2.4.1.1 の問の (2) のロケット時間 τ と地球時間 t との関係を求め，その後で，単位を秒を年で，メートルを光年へ変換してロケットの速度，ロケットの固有時間，地球からロ

ケットまでの距離を図示します*5。

```
-->v:g*t/sqrt(1+g^2*t^2/c^2);
-->dtau:ratsimp(sqrt(1-v^2/c^2));
-->tau:integrate(dtau,t);   /* 求めるロケット時間 */
/* 秒を年, メートルを光年に変換する */
-->nen:3.1557600*10^7$  /* 1年を秒で */
sec:1/nen$        /* 1秒を年で */
lightv:2.9979*10^8$  /* 光速  m/s */
ly:float(nen*lightv)$ /* 1光年をmで */
meter:1/ly$           /* 1mを光年で */
/* 重力加速度の大きさ m/s^2を 光年/年^2で */
g:9.8*meter/(sec^2)$
c:1$
```

```
/* 速度 [光年/年] */
-->v(t,n):=n*g*t/sqrt(1+n^2*g^2*t^2/c^2);
-->plot2d([v(t,1/5),v(t,1),v(t,5)], [t,0,30],
        [plot_format, openmath])$
/* ロケット時間 [年] */
-->tau(t,n):=c*asinh(n*g*t/c)/(n*g);
-->plot2d([tau(t,1/5),tau(t,1),tau(t,5)], [t,0,30],
        [plot_format, openmath])$
/* 距離 (年を単位とした地球時間の関数) [光年] */
-->dist(t,n):=c^2/(n*g)*(sqrt(1+n^2*g^2*t^2/c^2)-1);
-->plot2d([dist(t,1/5),dist(t,1),dist(t,5)], [t,0,30],[y,0,30],
      [plot_format, openmath])$
```

B.5.2 宇宙モデルから

CD-ROM の中には，宇宙モデル関係のファイルとして，3 次元一様等方空間を求める *3D_space_homo_iso.wxm*，フリードマン方程式を求める *Friedman_Eq_Calc.wxm*，種々の宇宙モデルに関係したグラフを描く *Cosmo_model.wxm* があります。以下は，*Cosmo_model.wxm* の内容です。

*5 CD-ROM 中のファイル名は，*Tokasokudo.wxm* です。

```
/* x0 の関数としての a */
--> a_v(x0,a0v,k):=if k=0 then a0v*%e^(x0/a0v) else if
      k=1 then a0v*cosh(x0/a0v) else if k=-1 then a0v*sinh(x0/a0v);
--> plot2d([a_v(x,1,0),a_v(x,1,1),a_v(x,1,-1)], [x,0,3],
         [plot_format, openmath])$
```

```
/* 輻射で満ちた宇宙 */
--> a_r(x0,a0r,k):=if k=0 then sqrt(2*a0r*x0) else if
      k=1 then sqrt(x0*(2*a0r-x0)) else if k=-1 then sqrt(x0*(x0+2*a0r));
--> plot2d([a_r(x,10,0),a_r(x,10,1),a_r(x,10,-1)], [x,0,30],
      [plot_format, openmath])$
/* 塵で満ちた宇宙 */
--> a_d(xi,xi0,k):=(xi0^2+k)/(xi^2+k);
--> Uhen(xi,k):=if k=1 then (1-xi*tan(xi/(1+xi^2)))/(xi+tan(xi/(1+xi^2)))
                 else if k=-1 then (xi/(xi^2-1)+1/2*log((xi-1)/(xi+1)));
--> Timex0(xi,xi0,k):=if k=0 then 2*xi0^2/(3*xi^3) else if
          k=1 then  (1+xi0^2)*atan(Uhen(xi,1)) else if
          k=-1 then (-1+xi0^2)*Uhen(xi,-1);
--> plot2d([Timex0(x,2,0),Timex0(x,2,1),Timex0(x,2,-1)], [x,0.1,2],
            [y,0,100], [plot_format, openmath])$
 --> plot2d([['parametric, Timex0(xi,2,0), a_d(xi,2,0), [xi, 0.1, 5],
         [nticks, 300]],['parametric, Timex0(xi,2,1), a_d(xi,2,1),
          [xi, 0.1, 5],[nticks, 300]],['parametric, Timex0(xi,2,-1),
          a_d(xi,2,-1), [xi, 1.1, 5], [nticks, 300]]], [x,0.0,5],
          [plot_format, openmath])$
```

B.6 テンソル演算

Maxima は，テンソル演算に関して3種類の便利なパッケージを持っています。これらは，シンボリックな計算をするために便利な itensor，成分を用いた計算に便利な ctensor，そしてもっと高度な応用ができる atensor の3種類です。

以下の小節では，本文中の2，3の複雑な式の導出を ctensor パッケージの使用例として示すことにしましょう。

B.6.1 アインシュタイン方程式の導出

最初の例として，Maxima との対話的な仕方でシュワルツシルド時空に対するアインシュタイン方程式を求める手順を示します。

(1) **load(ctensor);** これによって c パッケージが読み込まれる。

(2) **csetup();** これを用いると，以下次元の設定 (4;)，独自の座標を用いるかどうか (y;)，y;(yes) の場合は座標のリストを入力 ([x0,r,th,fi];)，新しいメトリックテンソルの入力を直接か 1. ファイルからか 2.，テイラー級数で近似した形でか 3. の選択 (1;) と，1を選ぶと 1．対角か，2．対称か，3．反対称か，4．一般的かを問われる。(1;) と，1を選ぶと11成分，22成分，33成分，44成分の入力を順に促される（ここでは，シュワルツシルド解を目指すことにして，A;-B; -r^2; -r^2*sin(th)^2; と順々に入力する)。次に，入力した関数についての依存関係を聞かれる。(ここでは，depends([A,B],r)；と入力して A,B が r の関数であることを宣言)，そして最後に入力したメトリックの確認に y と打って終了。

(3) **lg;** によって，入力したメトリックテンソル $g_{\mu\nu}$ が行列形で表示される。成分は lg[1,1]; 等により取り出せる。

(4) 反変メトリック $g^{\mu\nu}$ は，パッケージ内で自動で計算されていて **ug;** によって表示される。個々の成分は ug[1,1]; 等で取り出せる。

(5) **christof(mcs);** で0以外の第2種のクリストッフェル記号 $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ が表示される。個々の成分は mcs[1,1,2]; 等として取り出せる。mcs[μ,ν,λ] で最後の λ が上付きの添え字に対応することに注意。

(6) **riemann(true);** としてリーマンテンソル $R^{\lambda}{}_{\kappa\mu\nu}$ が表示される。成分は riem[1,2,3,4]; 等として取り出せる。riem[κ,μ,ν,λ] の最後の文字 λ が最初の上付き添え字に対応する。

(7) **ricci(true);** として，リッチテンソル $R^{\lambda}{}_{\mu\nu\lambda} \equiv R_{\mu\nu}$ が表示される。その成分は ric[1,1] 等である。因に，uric[i,j] とすると i が共変，j が反変の混合リッチテンソルが得られる。

(8) **einstein(true);** によってアインシュタインテンソル G^{ν}_{μ} が表示される。成分は ein[1,1] 等である。

(9) 共変成分 $G_{\mu\nu}$ は **leinstein(true);** で表示される。

B.6.2　使用例

B.6.2.1　フリードマン方程式の導出

例えば，以下のように順に入力するとフリードマン方程式 (5.28) と (5.29) とが得られます[*6]。しかし，(5.28) を得るには，以下の FrdEq の出力で，

$$\frac{2\dot{a}\ddot{a}}{a^2}-\frac{2\dot{a}^3}{a^3}=\frac{d}{dx^0}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2,\quad -\frac{2k\dot{a}}{a^3}=\frac{d}{dx^0}\left(\frac{k}{a^2}\right)$$

に気付く必要があるでしょう。

以下において，uU は反変 4 元速度で lU はその共変成分，T[i,j] はエネルギー・運動量テンソル T^{ij}，CoDiff_T[i,j,k] はその共変微分 $T^{ij}{}_{;k}$ を，そして cDif_T[i] は，その共変ダイバージェンス $T^{ij}{}_{;j}$ を意味します。

```
-->load(ctensor)$
-->ct_coords:[x0,r,th,phi]$
-->lg:matrix([1,0,0,0],[0,-a^2/(1-k*r^2),0,0],[0,0,-a^2*r^2,0],
        [0,0,0,-a^2*r^2*sin(th)^2]);
-->depends(a,x0)$
-->ug:lg^^(-1);
-->christof(mcs)$
-->einstein(true)$
```

[*6] CD-ROM 中のファイル *Friedman_Eq_Calc.wxm* で扱っています。

```
-->uU:[c,0,0,0]$
-->lU[i]:=sum(uU[j]*lg[j,i],j,1,4)$
-->dlta:ident(4)$
-->x:[x0,r,th,phi]$
-->depends([rho,p],x0)$
-->T[i,j]:=(rho+p)*uU[i]*uU[j]/c^2-p*ug[i,j]$
-->genmatrix(T,4,4)$
-->CoDiff_T[i,j,k]:=
      diff(T[i,j],x[k])+ sum(mcs[k,l,i]*T[l,j]+mcs[k,l,j]*T[i,l],l,1,4);
-->cDif_T[i]:=sum(CoDiff_T[i,j,j],j,1,4);
-->cDif_T[1];cDif_T[2]; cDif_T[3]; cDif_T[4];
-->ratsimp(cDif_T[1]);
-->dota:diff(a,x0);
-->FrdEq:diff((dota/a)^2+k/a^2-8*%pi*G/(3*c^4)*rho,x0);
-->load("lrats")$
-->fullratsubst([diff(rho,x0)=-3*dota/a*rho-3*dota/a*p,
      rho=3*c^4/(8*%pi*G)*(dota^2/a^2+k/a^2)],FrdEq);
-->ratsimp(%/(a^2*c^4*dota));
```

付録 C

プログラムについて

C.1　作成方針

当アプリは，以下の基本的な方針に従って作成しています。

(1) 現象のイメージを捉え易くするため３Ｄ表示とする。
(2) 遠方の観測者が観測したという状況を想定する。
(3) 任意の場所で，任意の方向に，任意の速度（小物体の場合）で放射された場合を想定する。

これらの方針に沿うように，プログラミング環境を整備する必要がありますが，これについては後回しにして，先ず理論の整備から始めることにしましょう。

C.2　時間発展方程式

方針 (1) に基づいて，本文で扱ったように運動面を xy 面，つまり $\theta = \frac{\pi}{2}$ に固定しないで一般的に扱うことにします。このとき，ラグランジアン (4.16) から導かれる方程式は，次のようになります。ただし，τ は小天体の場合 $(\epsilon = 1)$ は，固有時間で光の場合 $(\epsilon = 0)$ は，適当なアフィンパラメータです。またもちろん，L は，(4.51) の θ を含む場合の一般形です。

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\tilde{E}}{c^2(1-\frac{a}{r})}, \tag{C.1}$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L}{r^2\sin^2\theta}, \tag{C.2}$$

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = -\frac{2}{r}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{\cos\theta}{r^4\sin^3\theta}L^2, \tag{C.3}$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{\tilde{E}^2}{c^2} - r^2(1-\frac{a}{r})\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{r^2}(1-\frac{a}{r})\frac{L^2}{\sin^2\theta} - c^2(1-\frac{a}{r})\epsilon \tag{C.4}$$

更に，これらの式を，次の関係に注意して，τ から座標時間 t についての微分方程式へ変換します。

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt} = \frac{\tilde{E}}{c^2(1-\frac{a}{r})}\frac{d}{dt}, \tag{C.5}$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}\right) = \frac{\tilde{E}^2}{c^4(1-\frac{a}{r})^2}\left[\frac{d^2}{dt^2} - \frac{a}{r^2(1-\frac{a}{r})}\frac{dr}{dt}\frac{d}{dt}\right] \tag{C.6}$$

結果は，次のようになるでしょう。

$$\theta'' = \frac{3a-2r}{r^2(1-\frac{a}{r})}r'\theta' + c^2D^2\frac{(1-\frac{a}{r})^2}{r^4}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}, \tag{C.7}$$

$$\phi' = cD\frac{1-\frac{a}{r}}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}, \tag{C.8}$$

$$r'^2 = c^2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2 - c^2\hat{E}\left(1-\frac{a}{r}\right)^3 - c^2D^2\frac{(1-\frac{a}{r})^3}{r^2\sin^2\theta} - r^2\left(1-\frac{a}{r}\right)\theta'^2 \tag{C.9}$$

r については，計算の便宜のために式 (C.9) を用いる代わりに，これを更に t で微分して得られる式に (C.7) を代入し，整理して得られた次の 2 階の微分方程式を用いることにします。

$$r'' = \frac{5a-2r}{2r^2(1-\frac{a}{r})}r'^2 - \frac{c^2(3a-2r)}{2r^2}(1-\frac{a}{r}) - c^2\hat{E}\frac{(1-\frac{a}{r})^3}{r} \tag{C.10}$$

ここで，プライム (') は，t についての微分を表し，D は $D \equiv \frac{cL}{\tilde{E}}$，そして $\hat{E} \equiv \frac{c^4\epsilon}{\tilde{E}^2}$ と置いていることに注意して下さい。

実際に，これらの微分方程式の組みを，ルンゲ・クッタ法により数値的に解く場合には，$r' \equiv v_r$，$\theta' \equiv v_\theta$，$\phi' \equiv v_\phi$，$r'' \equiv v_r'$，$\theta'' \equiv v_\theta'$ と置いて 1 階連立微分方程式の形に書き変えます。このとき，これらの式に含まれる保存量 D と $\hat{E}$ の値は，以下の小節で述べる方法で初期条件から求めます。

C.3 初期条件

ユーザーが設定した光源，惑星，粒子の最初の位置 (X, Y, Z) と，その位置でのそれらの速さ v_ϵ と放射角 (Ψ, Φ) とから，ルンゲ・クッタ法による数値計算に必要な $(r, \theta, \phi,\ r', \theta')$ の初期値，および保存量 D, $\hat{E}$ の値は，以下のようにして求められます。ただし，放射角については図 C.1 を参照して下さい[*1]。また，v_ϵ は，$\epsilon = 0$，つまり光の場合には $v_0 \equiv c$ と定義していることに注意して下さい。

[*1] 放射角の一つ Ψ は，回避のコーンの節 §4.5.6 で導入した角 ψ と補角，つまり $\Psi = \pi - \psi$ の関係にあることに注意して下さい。

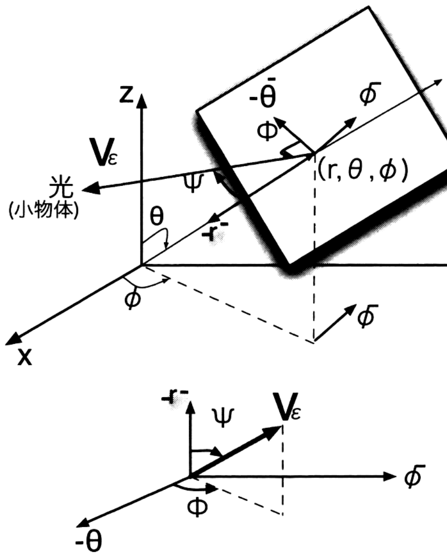


図 C.1　**点 $\mathbf{P}(r, \theta, \phi)$ での放射角** $(\Psi,\ \Phi)$

r, θ, ϕ の決定　普通の直交座標と極座標の間の関係を用います。

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \tag{C.11}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{Z}{r}\right), \tag{C.12}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) \tag{C.13}$$

$r', \theta', D, \hat{E}$ の決定　図 C.1 を参考にすると，放射速度の r, θ, ϕ 方向成分 $\tilde{v}_r$，$\tilde{v}_\theta$，$\tilde{v}_\phi$ は，それぞれ

$$\tilde{v}_r = -v_\epsilon \cos\Psi, \tag{C.14}$$

$$\tilde{v}_\theta = -v_\epsilon \sin\Psi \cos\Phi, \tag{C.15}$$

$$\tilde{v}_\phi = v_\epsilon \sin\Psi \sin\Phi \tag{C.16}$$

と表されます。一方，これらは，この点 (r,θ,ϕ) での固有時間 $d\tilde{t}$ と固有長さ $d\tilde{r}$ が，シュワルツシルド計量 (4.14) により

$$d\tilde{t}=\sqrt{1-\frac{a}{r}}\;dt,\qquad d\tilde{r}=\frac{dr}{\sqrt{1-\frac{a}{r}}} \tag{C.17}$$

であるため，

$$\tilde{v}_r=\frac{d\tilde{r}}{d\tilde{t}}=\frac{r'}{1-\frac{a}{r}}, \tag{C.18}$$

$$\tilde{v}_\theta=r\frac{d\tilde{\theta}}{d\tilde{t}}=\frac{r\theta'}{\sqrt{1-\frac{a}{r}}}, \tag{C.19}$$

$$\tilde{v}_\phi=\frac{r\sin\theta d\phi}{d\tilde{t}}=\frac{r\sin\theta\;\phi'}{\sqrt{1-\frac{a}{r}}} \tag{C.20}$$

となることが分かります。従って，これらと上の式とから次の関係が導かれます。

$$r'=-v_\epsilon\left(1-\frac{a}{r}\right)\cos\Psi, \tag{C.21}$$

$$\theta'=-\frac{v_\epsilon\sqrt{1-\frac{a}{r}}}{r}\sin\Psi\cos\Phi, \tag{C.22}$$

$$\phi'=\frac{v_\epsilon\sqrt{1-\frac{a}{r}}}{r\sin\theta}\sin\Psi\sin\Phi \tag{C.23}$$

また一方，D は，(C.8) と (C.23) とから，そして $\hat{E}$ は，この結果と (C.9) と (C.21) と (C.22) とを用いることに依って求めることができます。

$$D=\frac{r\sin\theta}{\sqrt{1-\frac{a}{r}}}\frac{v_\epsilon}{c}\sin\Psi\sin\Phi, \tag{C.24}$$

$$\hat{E}=\frac{1-\frac{v_\epsilon^2}{c^2}}{1-\frac{a}{r}} \tag{C.25}$$

ここで，光に対しては，もちろん $v_\epsilon=c$, $\hat{E}=0$ と成ることに注意しましょう。

C.4　アプリ開発環境

Mac の OS X 10.6 環境で開発を行い，Windows と Linux（Ubuntu）環境はテスト用に用いています。Linux でも後述の Windows の『Code Blocks』による環境を構築することができるため，Mac と Windows について記すに止めます。

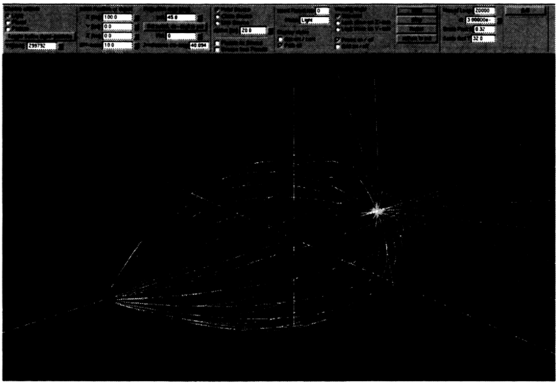


図 C.2 **作成したプログラムによって描いた BH 近傍の光の軌道**

C.4.1 使用言語

プログラムは，C/C++ 言語で基本部分を作り[*2]，計算結果の表示のために OS に依存しない 3D のグラフィックスライブラリーである OpenGL を用い，OS と OpenGL との橋渡し，つまりプログラムのインタフェースの部分を GLUT（実際にはこれをより使い易くした GLUI）ライブラリーを用いて作成しました[*3]。

C.4.2 Mac 環境

CPU が Dual-Core Intel Xeon で OS が SnowLeopard の Mac Pro と，2.8 GHz Intel Core i7 の iMac(Late 2009) に，SnowLeopard から Lion，Mavericks へとアップグレードした OS に，App Store からそれぞれに対応する Xcode をダウンロードしてインストールし，更にこれに別のサイトから入手した GLUI.Framework をインストールして用いています。尚，GLUT は 10.6 より後の OS X をサポートしていないようなので注意が必要です。

[*2] 微分方程式の計算部分については，ルンゲ・クッタ class ファイルである Diffeq.cpp とヘッダーファイル Diffeq.h を資料 [19]-(1) のサイトよりそのままダウンロードして用いさせて頂いています。作者の David Joiner，および Shodor Education Foundation に感謝申し上げたい。

[*3] OpenGL は Silicon Graphics (略して SGI) 社が開発しライセンスしている PDS で，GLUT(The OpenGL Utility Toolkit) は元々 SGI の Mark Kilgard により作成されたものですが，現在はメンテナンスされていないため，ここでは互換の Toolkit として freeglut をインストールして用いています。使い方については，和歌山大学の床井氏のサイト [19]-(2) を参考にさせて頂きました。また，GLUI については，静岡大学のサイト [19]-(3) と [19]-(4) を参考にさせて頂きました。

C.4.3　Windows 環境

素ではアプリの開発環境を持たない Windows では，Code Blocks with minGW というフリーな開発環境をインストールして用いています。これは，C/C++ をコンパイルできる gcc などの一式のツールを備えた gnu の最小セット mingw を内蔵した統合開発環境を提供してくれます。

当アプリの開発には，更にこれに他のサイトより入手した freeglut と glui ライブラリをインストールして用いています。尚，これらのライブラリのインストール方法については次節を参照して下さい。

Windows には，他にも Visual Studio というマイクロソフトの強力な標準（？）の開発環境もあります。興味のある方はお試し下さい。

C.5　開発環境の構築

以下は，2014 年 2 月現在で著者達がインストールした環境でのものです。その後，すべての開発環境ツール（Mac OS や Windows OS などの OS や，開発環境 Xcode や Code Blocks など）の変更やネットワークのリンク切れなども考えられるので注意が必要です。

C.5.1　Mac OS X

C.5.1.1　Xcode のインストール

App Store より SnowLeopard でも Marvericks でも対応するバージョンのものをダウンロードしてインストールします。

C.5.1.2　GLUI のインストール

Xcode を入れると OpenGL と GLUT は入っていますが GLUI ライブラリは入っていないため別に入れる必要があります。次の 2 つの方法があります。

■公開されている Framework を用いる方法 (Xcode による統合開発環境には必須)：

(1) 例えば，
https://lukecyca.com/2008/glui-235-framework-for-mac-os-x.html よりダウンロード。

(2) 解凍後インストーラを起動してインストール。
/Library/Frameworks/にインストールされる。

(3) ソースコードに #include <GLUI/glui.h>を記入して用いる。

■ソースコードをコンパイルして用いる方法 (X11(XQuartz) をインストールしておく必要がある)：

(1) http://sourceforge.net/projects/glui/よりダウンロードして解凍。
(2) ターミナルを起動して，できたフォルダ glui-2.36 の中の src フォルダに cd(移動)。
(3) makefile を編集：上から4行目の#CC=gcc のコメントを外す（#を取る)。
(4) make すると lib フォルダの中に libglui.a が作られる。これを/usr/X11R6/lib にコピーする
(5) include/GL の中にある glui.h を/usr/X11R6/include/GL の中にコピーする。

C.5.2 Windows

C.5.2.1 Blocks with minGW を用いる

サイト http://www.codeblocks.org/downloads/26#windows から，gcc などの gnu の最小の開発ツールのセット mingw が内蔵された統合開発環境 Code Blocks のバージョン **codeblocks-13.12mingw-setup.exe** をダウンロードしてインストールします。その後，Glut の更新版である **freeglut-MinGW-2.8.1-1.mp.zip** をサイト http://www.transmissionzero.co.uk/software/freeglut-devel/よりダウンロードして適当な場所で解凍します。

C.5.2.2 Blocks へ freeglut を入れる

以下については，http://wiki.codeblocks.org/index.php?title=Using_FreeGlut_with_Code::Blocks に詳しく書かれているので不明な点はそちらを参考にして下さい。ここでは大まかな手順のみを示すことにします。

(1) 解凍してできた freeglut のフォルダのサブフォルダ内のファイルを C:\Program Files (x86)\CodeBlocks\MinGW の中の対応するフォルダ内に移す。
(2) この中の **freeglut.dll** を C:\Windows へコピー。
(3) C:\Program File (x86)\CodeBlocks\MinGW\bin をパスに加える。
(4) C:\Program Files (x86)\CodeBlocks\share\CodeBlocks \templates\wizard\glut に入り，**wizard.script** ファイルを編集する。

C.5.2.3 wizard.script ファイルと glut.cbp ファイルの編集

以下の操作は，ファイルが編集不可と成っているため，属性を変えるか，一旦当該ファイルをデスクトップ等にコピーしてそこで編集したものを元の場所に戻すといった方法などを取るとよいでしょう。

(1) wizard.script ファイルの中の glut32 の箇所を，すべて freeglut で置き換える。
(2) c:\Program Files (x86)\CodeBlocks\share\CodeBlocks\templates の中の **glut.cbp** ファイルの glut32 の箇所をすべて freeglut に変更する。

C.5.2.4 テスト：CodeBlocks を起動して Demo を見る

メニューから New Project を選び，テンプレートから Glut/Glut Project を選択して，ファイル名とそれを置く場所を入力します。更に Glut の場所，コンパイラの種類（GNU GCC　Compiler) 等を入力すると Demo プロジェクトの編集画面が開きます，その画面で緑の矢印をクリックするとデモが開始されるでしょう。

C.5.2.5 glui のインストール

これについては，http://masdel.wordpress.com/2010/10/21/installing-glui-using-codeblocks-on-windows/に詳しい手順が書かれています。必要なら参考にして下さい。以下に簡単に手順を説明します。

(1) http://sourceforge.net/projects/glui/files/から glui-2.36.tgz をダウンロードして解凍します。

(2) Code Blocks を起動して，File メニューから Import Projects->MS Visual Studio Solution を選び，続いて

(3) 解凍した glui フォルダの src/msvc ディレクトリから **glui.sln** ファイルを選びます。これにより自動的に VS solution から Code Blocks プロジェクトへ変換されます。

(4) 開いたプロジェクトリストの中から_glui library を選んで右クリックしてこのプロジェクトをアクティブにした後で走らせます。

(5) 上記の操作により，msvc/lib ディレクトリに **libglui32.a** が作られるので，このファイルを C:\Program Files (x86)\CodeBlocks\MinGW/lib へコピーします。

(6) 更に，**glui.h** を C:\Program Files (x86)\CodeBlocks\MinGW/include/GL ディレクトリへコピーします。

(7) glui.h ファイルを編集して，#include<cstdlib>のある行の前に，**#include <windows.h>**を入れます。

(8) example 2 project を選び，右クリックしてアクティブにした後で，このプロジェクトを選んで **Build Options** を表示し，

(9) Build Options のメニューから Link Settings を選んで glui lib を追加します。結果として，opengl32,glu32,freeglut,libglui32.a が表示されていれば OK.

(10) 矢印キーを用いて追加した glui lib が最初の位置に来るようにします（この操作は不要かも知れません)。

(11) example 2 をアクティブにしてビルドして走らせます。

(注) 以上では Debug 用の設定しかできていないため，Release 版が必要な場合はこれについても同様な設定をする必要があります。

付録 D

参考文献について

D.1 参考文献

以下のリストは，著者の一人（中力）がこれまでに読んで来たものの内で印象に残ったもの，ゼミで用いて来たもの，そして，本書を書く上で参考にさせて頂いたものをランダムに列挙したものです[*1]。この分野をより深く学びたいと思う読者の参考のために簡単なコメントを付しておきます。

[1] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, "The Classical Theory of Fields", Pergamon Press.（日本語訳もあります。前半が特殊相対論と電磁気学で後半が一般相対論です。変分法を用いているため，同じランダウ-リフシッツの理論物理学教程シリーズの中の「力学」の最初の章を読んでから読むことを薦めます。）

[2] J. L. Martin, "General Relativity: A Guide to its Consequences for Gravity and Cosmology", Ellis Horwood Limitted. （この資料の特殊相対論の章は，この本に多く依存しています。）

[3] S. Chandrasekhar, "The Mathematical Theory of Black Holes", Oxford Univ. Press. （かなり難解ですが，簡単な微分幾何学のまとめから始め，通常のテンソル形式ではなく，Newman-Penrose 形式を用いて，色々なタイプのブラックホールによる時空構造について議論しています。）

[4] S. Weinberg, "Gravitation and Cosmology", John Wiley and Sons.（ワインバーグ特有のかなり厳密な議論を展開しているので初心者にはかなり歯ごたえがありますが，この分野の研究者には必読の一冊でしょう。）

[5] I.R.Kenyon, "General Relativity", Oxford Science Pub. （一般相対論への入門書。詳しく読んだ訳ではないが，この資料の共変，反変ベクトルのビジュアルなイメージについて書いた箇所で参考にした資料が見当たらないので代わりに上げておきます。ざっと見てかなり丁寧に書かれています。相対論初心者にはお薦めです。）

[*1] 特に依存度の大きいものについては本文中の該当箇所にその旨を明記しております。

[6] A.Papapetrou, "Lectures on General Relativity", D.Reidel Pub. （この本は，特に，テンソル密度とリーマンテンソルの記述が丁寧で分かりやすい。本書ではテンソル密度についての説明は殆どしていないため，興味のある人はこの本を参照して頂きたい。）

[7] P.M. Schwarz and J.H. Schwarz, "Special Relativity: From Einstein to Strings", Cambridge. (最近の本です。簡単なビジュアルなプログラムもついて読み安いが，相対論の研究者向けと云うより，素粒子論を志す初心者向けです。)

[8] 山内恭彦, 内山龍雄, 中野董夫, "一般相対性および重力の理論", 裳華房. （少々古いが，3人の大御所の著作で含蓄があります。この資料では，一様等方時空の幾何学的なイメージについての箇所を参考にさせていただいています。）

[9] 内山龍雄, "一般相対性理論", 裳華房. (内山氏の個性豊かな本です。この資料では用いていませんが，特に，一様等方空間の議論はユニークです。)

[10] 平川浩正， "相対論"，共立出版. （少々古いが，相対論の標準的な教科書です。特殊相対論から重力波や宇宙論まで広い範囲の内容がコンパクトにまとめられています。本書ではマイケルソン＝モーレーの実験とトーマス才差の箇所で参考にさせていただいています。）

[11] 窪田高弘, 佐々木隆, "相対性理論", 裳華房. (初心者向けに易しくコンパクトに書かれています。一通り読んだ後，詳しい議論は他の本で補う必要があるかもしれません。)

[12] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, "Gravitation", W.H.Freeman and Company. (相対論を中心とした重力全般を網羅した辞典的な本。読みこなすにはかなりの労力がいるでしょう。ブラックホールの節のワームホールの絵はこの本から借用したものです。)

[13] L. Bergström and A. Goobar, "Cosmology and Particle Astrophysics", Wiley. (宇宙論全般についての概論的な本です。色々な情報が良く整理されていると思います。しかし，紙数の関係で説明は簡単です。従って，文中で興味を持った箇所については他の本を参照しながら読む必要があるでしょう。)

[14] E.W.Kolb and M.S.Turnew, "The Early Universe", Addison-Wesley Pub. （初期宇宙論に関するかなり本格的な本。宇宙の初期をターゲットにしているので素粒子論の知識が必要ですが，簡単な要約が付録にあるので参考になるでしょう。）

[15] Lisa Randall, "Warped Passages *Unraveling the Mysteries of the Universe's Hidden Dimensions*" （この本は，ちょっと異色で，一般大衆向け科学啓蒙書の部類に属します。内容は素粒子論の方から示唆されている多次元宇宙の存在について解説したものです。著者は多次元宇宙は現に存在していて，我々はそれに気がつかないだけで，注意深く観察するならその証拠は随所に見ることができると云うスタンスで書いています。訳本があるか否かは不明)

[16] Robert J.A.Lombourne, "Relativity, Gravitation and Cosmology", Cambridge Univ. Press （2010 年発行の比較的新しい本です。内容は大学3～4年向けで，特殊相対論から相対論的宇宙論までかなり丁寧に書かれています。関心があれば，英語の勉強も兼ねて一読されるとよいでしょう。）

[17] Jerzy Plebański and Andrzej Krasiński, "An Introduction to General Relativity and Cosmology", Cambridge Univ.Press (2006 年初版。一般相対論と相対論的宇宙論の本。本テキストでは余り触れていない微分幾何学のかなり詳しい説明があります。しかし，何と云っても 4 部から成る相対論的宇宙論についての詳細な記述がこの本の特徴と言えるでしょう。

[18] 中力眞一,『シミュレーションで学ぶ電磁気学』, 工学社（相対論とは直接関係ありませんが，相対論の計算や結果をグラフ化して見るために数式処理ソフトを用いることは大変有効です。数式処理ソフトには Reduce,Mathmatica,Maple など優れた市販ソフトがありますが，この本で紹介する Maxima(wxMaxima) はフリーですがこれらに匹敵する性能を持っています。この本はその使い方の一部を電磁気学での使用に限って紹介したものです[*2] 。)

[19] 著書ではありませんが，参考にさせて頂いたサイトを挙げておきます。

(1) Joiner, http://www.shodor.org/cserd

(2) 床井, http://www.wakayama-u.ac.jp/~tokoi/opengl/libglut.html

(3) 静岡大学, http://ktm11.eng.shizuoka.ac.jp/glui/glui.html

(4) mikk, http://wiki.livedoor.jp/mikk_ni3_92/d/GLUI

*2 相対論での使用法については，付録 C でその簡単な紹介をしております。

索引

◉著者略歴

中力 眞一 (なかりき しんいち)

1971年　岡山理科大学応用物理学科卒業
1974年　熊本大学大学院理学研究科理論物理学専攻修士課程修了
1976年　岡山理科大学理学部応用物理学科助手
1983年　大阪市立大学（中野董夫研究室へ内地留学）
1991年　理学博士（広島大学）
2003年　岡山理科大学総合情報学部教授
2011年　岡山理科大学自然科学研究所教授
著　書　『シミュレーションで学ぶ電磁気学』（2011年，工学社），『Photon and Poincare Group』（1999, Nova Science Pub.Inc., pp.362-376, 共著）

福間 一巳 (ふくま かずみ)

1980年　大阪市立大学理学部物理学科卒業
1987年　大阪市立大学大学院理学研究科物理学専攻後期博士課程単位修得満期退学
1987年　島根県立大田高等学校教諭
1991年　島根県立益田高等学校教諭
1993年　詫間電波工業高等専門学校電子制御工学科講師
2002年　博士（理学）（大阪市立大学）
2005年　詫間電波工業高等専門学校電子制御工学科教授
2009年　香川高等専門学校情報工学科教授

シミュレーションで学ぶ
相対論入門

2015年10月1日　第1版第1刷発行

著　者　中力　眞一／福間　一巳
発行者　麻畑　　仁
発行所　㈲プレアデス出版
〒399-8301　長野県安曇野市穂高有明7345-187
TEL 0263-31-5023　FAX 0263-31-5024
http://www.pleiades-publishing.co.jp
装　丁　松岡　　徹
印刷所　亜細亜印刷株式会社

落丁・乱丁本はお取り替えいたします。定価はカバーに表示してあります。
ISBN978-4-903814-75-9　C3042　　Printed in Japan